# Необходимое и достаточное условие экстремума функции многих переменных

Рассмотрим задачу на нахождение условного экстремума для случае функции двух переменных.

## Необходимое условие экстремума.

Пусть имеется дважды дифференцируемая функция

$$f = f(x, y) \tag{1}$$

переменные которой не произвольны – между ними имеется связь

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{2}$$

Например,

$$\begin{cases} f = xy^2 - y \\ y - x^2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

**Метод подстановки.**

Будем решать задачу методом подстановки.

Используя уравнение связи, выразим $y$ через $x$ в виде $y = x^2$. Тогда приходим к функции одной переменной

$$f = f(x) = x(x^2) - x^2 = x^5 - x^2 \tag{4}$$

Стационарные точки находим с помощью дифференцирования.

$$f' = 5x^4 - 2x = 5x(x^3 - \frac{2}{5}) \tag{5}$$

Так как в стационарных точках производная равна нулю, то

$$f' = 0 \Leftrightarrow 5x(x^3 - \frac{2}{5}) = 0 \tag{6}$$

Откуда получим две точки, подозрительные на экстремум.

$$x = 0, \qquad x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}} \tag{7}$$

Исследуем изменение знака производной вблизи стационарных точек методом интервалов.

$$\begin{array}{cccccc} x & x<0 & x=0 & 0<x<\sqrt[3]{\frac{2}{5}} & x=\sqrt[3]{\frac{2}{5}} & x>\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \\ y' & + & 0 & - & 0 & + \\ y & \nearrow & 0 & \searrow & 0 & \nearrow \end{array} \tag{8}$$

Вывод: точка $x = 0$ – точка максимума, а точка $x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$ – точка минимума.

**Метод метод множителей Лагранжа.**

Разложим исследуемумую функцию $f(x, y)$ в ряд Телора в форме Пеано:

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) =$$

$$= f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + \frac{1}{2} f''_{xx} \Delta x^2 + f''_{xy} \Delta y \Delta x + f''_{yy} \Delta y^2 + \alpha_1(\Delta\rho)\Delta\rho^2 \qquad (9)$$

где $\Delta\rho^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$. Все бесконечно малые здесь и далее будут обозначаться как $\alpha_k(\Delta\rho), k = 1, 2, \ldots$.

Так как имеется связь $\varphi(x, y) = 0$, то $x$ и $y$ не любые: в общем случае при изменении одной переменной – меняется и другая переменная, но всегда

$$\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) = \varphi(x, y) = 0 \qquad (10)$$

поэтому, разлагая и связь $\varphi(x, y) = 0$ в ряд Тейлора в форме Пеано, получим:

$$0 = \Delta\varphi = \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x, y) =$$

$$= \varphi'_x \Delta x + \varphi'_y \Delta y + \frac{1}{2} \varphi''_{xx} \Delta x^2 + \varphi''_{xy} \Delta y \Delta x + \varphi''_{yy} \Delta y^2 + \alpha_2(\Delta\rho)\Delta\rho^2 \qquad (11)$$

Заметим, что в точке условного экстремума первый дифференциал функции $f(x, y)$ должен равняться нулю. Действительно, допустим связь (2) разрешима, и мы получили:

$$y = y(x)$$

Тогда

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha_3(\Delta x)\Delta x \qquad (12)$$

Откуда

$$df = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y = f'_x \Delta x + f'_y y' \Delta x = (f'_x + f'_y y')dx \qquad (13)$$

или, рассматривая функцию $f$ как функцию одной переменной, мы должны сделать вывод, что в точке экстремума по теореме Коши дифференциал этой функции равен нулю, то есть:

$$f'_x + f'_y y' = 0 \qquad (14)$$

(дифференциалом же является главная линейная часть приращения функции. Для функции, имеющей конечную производную, производная равна коэффициенту при $dx$ в дифференциале.)

Таким образом первый дифференциал функции двух переменных (1) в точке экстремума и при наличии связей также равен нулю.

Как найти эту точку, если не так-то просто разрешить связь как функцию $y = y(x)$? (Очевидно предыдущие рассуждения справедливы и в случае, когда связь разрешается как $x = x(y)$.) Можно воспользоваться методом неопределённых множителей Лагранжа. Суть его в следующем: так как в случае поиска экстремума достаточно исследовать только первые дифференциалы, то рассмотрим систему из уравнений (2), (9), (11) в точке экстремума (ограничиваясь первыми дифференциалами):

$$\begin{cases} df = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y = 0 \\ d\varphi = \varphi'_x\Delta x + \varphi'_y\Delta y = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Умножим вторую строку на некоторое число $\lambda$ и прибавим к первой. Откуда в точке экстремума

$$df = (f'_x + \lambda\varphi'_x)\Delta x + (f'_y + \lambda\varphi'_y)\Delta y = 0 \tag{16}$$

Подбираем число $\lambda$ таким, чтобы вторая скобка равнялась нулю. Но при таком $\lambda$ и первая скобка тоже должна быть равна нулю иначе первый дифференциал $f$ не будет равен нулю. Следовательно в точке экстремума будут выполняться условия:

$$\begin{cases} f'_x + \lambda\varphi'_x = 0 \\ f'_y + \lambda\varphi'_y = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Формально эта система как система, состоящая из трёх уравнений с тремя неизвестными имеет решение.

## Достаточное условие экстремума.

Пусть найдены все точки, подозрительные на экстремум. Рассмотрим изменения функции и связей вблизи точки экстремума

$$\begin{cases} \Delta f = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y + \frac{1}{2}f''_{xx}\Delta x^2 + f''_{xy}\Delta y\Delta x + \frac{1}{2}f''_{yy}\Delta y^2 + \alpha_1(\Delta\rho)\Delta\rho^2 \\ 0 = \varphi'_x\Delta x + \varphi'_y\Delta y + \frac{1}{2}\varphi''_{xx}\Delta x^2 + \varphi''_{xy}\Delta y\Delta x + \frac{1}{2}\varphi''_{yy}\Delta y^2 + \alpha_2(\Delta\rho)\Delta\rho^2 \end{cases} \tag{18}$$

Умножим вторую строку на найденное ранее $\lambda$ и прибавим к первой строке.

$$\Delta f = (f'_x + \lambda\varphi'_x)\Delta x + (f'_y + \lambda\varphi'_y)\Delta y + \tag{19}$$

$$+\frac{1}{2}(f''_{xx} + \lambda\varphi''_{xx})\Delta x^2 + (f''_{xy} + \lambda\varphi''_{xy})\Delta x\Delta y + \frac{1}{2}(f''_{yy} + \lambda\varphi''_{yy})\Delta y^2 + \alpha_3(\Delta\rho)\Delta\rho^2$$

(Заметим, что в приращении (9) функции $f$ со связью 10, приравняв нулю первый дифференциал в точке экстремума, второй дифференциал не будет равен оставшемуся выражению, так как это равенство нулю верно только с точностью до бесконечно малых более высокого порядка и приращение $\Delta y(x)$ ($y = y(x)$ – связь, разрешённая относительно $y$) также даёт свой вклад во второй дифференциал:

$$\Delta y = y'\Delta x + \frac{1}{2}y''\Delta x^2 + \alpha_4\Delta x^2)$$

Вблизи точек экстремума первый дифференциал (19) равен нулю (именно так выбирается число $\lambda$. По этой причине можно не исследовать квадратичный по $\Delta x$ вклад в $\Delta y$), поэтому для функции $F = f + \lambda\varphi$ будет

$$\Delta F = \Delta f = \frac{1}{2}(f''_{xx} + \lambda\varphi''_{xx})\Delta x^2 + (f''_{xy} + \lambda\varphi''_{xy})\Delta x\Delta y +$$

$$+\frac{1}{2}(f''_{yy} + \lambda\varphi''_{yy})\Delta y^2 + \alpha_3(\Delta\rho)\Delta\rho^2 \tag{20}$$

Здесь второй дифференциал равен оставшемуся выражению, так как выбирается число $\lambda$ такое, что обе скобки (18) первого дифференциала равны нулю.

Так как выражение (18) однородно и квадратично по приращениям $\Delta x$ и $\Delta y$, то, исследуя связь $\Delta x$ и $\Delta y$, можно ограничиться линейными членами. Таким образом

$$\varphi'_x\Delta x + \varphi'_y\Delta y = 0 \tag{21}$$

Откуда

$$\Delta y = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\Delta x \tag{22}$$

Подставляее (22) в (20) и пренебрегая бесконечно малыми более высокого чем второй порядок, получим

$$\Delta f = \frac{\Delta x^2}{2{\varphi'_y}^2}(F''_{xx}{\varphi'_y}^2 - 2F''_{xy}\varphi'_x\varphi'_y + F''_{yy}{\varphi'_x}^2) \tag{23}$$

Таким обазом, если в точке, подозрительной на экстремум

$$F''_{xx}{\varphi'_y}^2 - 2F''_{xy}\varphi'_x\varphi'_y + F''_{yy}{\varphi'_x}^2 > 0 \tag{24}$$

– то это точка минимума;

если в точке, подозрительной на экстремум

$$F''_{xx}{\varphi'_y}^2 - 2F''_{xy}\varphi'_x\varphi'_y + F''_{yy}{\varphi'_x}^2 < 0 \tag{25}$$

– то это точка максимума;

если в точке, подозрительной на экстремум

$$F''_{xx}{\varphi'_y}^2 - 2F''_{xy}\varphi'_x\varphi'_y + F''_{yy}{\varphi'_x}^2 = 0 \tag{26}$$

– то задача требует дополнительного исследования.

Отметим также, что, если в исследуемой точке $\varphi'_y = 0$, но $\varphi'_x \neq 0$, то все рассуждения оказываются верными, если связь разрешать относительно $x = x(y)$, но тогда

$$\Delta f = \frac{\Delta y^2}{2{\varphi'_x}^2}(F''_{xx}{\varphi'_y}^2 - 2F''_{xy}\varphi'_x\varphi'_y + F''_{yy}{\varphi'_x}^2) \tag{27}$$

И только при $\varphi'_y = 0, \varphi'_x = 0$ требуется дополнительный анализ.

Наконец, если связь разрешается относительно $y$ как $y - y(x) = 0$, то

$$\Delta f = \frac{\Delta x^2}{2}(f''_{xx} + 2f''_{xy}y' + f''_{yy}y'^2 + f'_y y'') \tag{28}$$

Таким образом, для того, чтобы найти экстремум функции двух переменных необходимо составить функцию Лагранжа

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) \tag{29}$$

и для неё решить систему

$$\begin{cases} f'_x + \lambda\varphi'_x = 0 \\ f'_y + \lambda\varphi'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{30}$$

(Необходимое условие экстремума.)

Решив систему и найдя точки, подозрительные на экстремум, вычислить выражение

$$F''_{xx}{\varphi'_y}^2 - 2F''_{xy}\varphi'_x\varphi'_y + F''_{yy}{\varphi'_x}^2 \tag{31}$$

После чего сделать вывод о типе стационарной точки.

**Пример.** Решим предложенную ранее задачу методом неопределённых множителей Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа.

$$F = xy^2 - y + \lambda(y - x^2) \tag{32}$$

Находим первые частные производные

$$\begin{cases} F'_x = y^2 - 2\lambda x \\ F'_y = 2xy - 1 + \lambda \\ y - x^2 = 0 \end{cases} \tag{33}$$

Составим необходимое условие:

$$\begin{cases} y^2 - 2\lambda x = 0 \\ 2xy - 1 + \lambda = 0 \\ y - x^2 = 0 \end{cases} \tag{34}$$

Решим его

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - 2\lambda x = 0 \\ 2x^3 = 1 - \lambda \end{cases} \tag{35}$$

Откуда

$$x(x^3 - 2\lambda) = 0, x_1 = 0, \lambda = x_2^3/2$$

Первое решение даёт

$$x_1 = 0, y_1 = 0, \lambda_1 = 1$$

Второе решение даёт

$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}, y_2 = \sqrt[3]{\frac{4}{25}}, \lambda_2 = \frac{1}{5}$$

Выясняем, есть ли экстремум в найденных точках.

Находим вторые частные производные функции Лагранжа и первые частные производные связей

$$\begin{cases} F''_{xx} = -2\lambda \\ F''_{xy} = 2y \\ F''_{yy} = 2x \end{cases} \begin{cases} \varphi'_x = -2x \\ \varphi'_y = 1 \end{cases} \tag{36}$$

Находим вторые частные производные функции Лагранжа и первые частные производные в первой точке

$$\begin{cases} F''_{xx} = -2 \\ F''_{xy} = 0 \\ F''_{yy} = 0 \end{cases} \begin{cases} \varphi'_x = 0 \\ \varphi'_y = 1 \end{cases} \tag{37}$$

Тогда в первой точке

$$F''_{xx}{\varphi'_y}^2 - 2F''_{xy}\varphi'_x\varphi'_y + F''_{yy}{\varphi'_x}^2 = -2$$

Таким образом первая точка, имеющая координаты $(0, 0)$, соответствуе максимуму функции.

Находим вторые частные производные функции Лагранжа и первые частные производные во второй точке

$$\begin{cases} F''_{xx} = -2/5 \\ F''_{xy} = 2\sqrt[3]{\frac{4}{25}} \\ F''_{yy} = 2\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \end{cases} \begin{cases} \varphi'_x = -2\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \\ \varphi'_y = 1 \end{cases} \tag{38}$$

Тогда во второй точке

$$F''_{xx}{\varphi'_y}^2 - 2F''_{xy}\varphi'_x\varphi'_y + F''_{yy}{\varphi'_x}^2 = 3/5 > 0$$

Таким образом вторая точка, имеющая координаты $(\sqrt[3]{\frac{2}{5}}, \sqrt[3]{\frac{4}{25}})$, соответствуе минимуму функции.

Задача решена двумя способами. Решения обоих способов совпали.

# Необходимое и достаточное условие экстремума функции многих переменных

В том случае, если число переменных больше двух, например:

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{39}$$

и имеется $r$ связей вида

$$\begin{cases} \varphi^1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \varphi^2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ \varphi^r(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{40}$$

Вводится функция Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{r} \lambda^i \varphi^i(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{41}$$

составляется необходимое условие экстремума функции многих переменных

$$\begin{cases} F'_{x_1} = 0 \\ F'_{x_2} = 0 \\ \dots \\ F'_{x_n} = 0 \end{cases} \tag{42}$$

Решениями системы (42) будут стационарные точки.

Исследуется достаточное условие. Для этого выписываются первые дифференциалы

$$\begin{cases} {\varphi^1}'_{x_1} \Delta x_1 + \ldots + {\varphi^1}'_{x_n} \Delta x_n = 0 \\ {\varphi^2}'_{x_1} \Delta x_1 + \ldots + {\varphi^2}'_{x_n} \Delta x_n = 0 \\ \dots \\ {\varphi^r}'_{x_1} \Delta x_1 + \ldots + {\varphi^r}'_{x_n} \Delta x_n = 0 \end{cases} \tag{43}$$

Система линейных уравнений разрешается относительно $\Delta x_i$. Решения (43) подставляются в квадратичная форму функции Лагранжа

$$\sum_{i,j=1}^{n} F''_{x_i,x_j} \Delta x_i \Delta x_j \tag{44}$$

которая исследуется на положительную или отрицательную определённость в стационарных точках.