МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЛИНЕЙНАЯ ЭФФЕКТИВНАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Методические указания и индивидуальные задания по курсу высшей математики

ИЗДАТЕЛЬСТВО
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ
2001

Утверждено учебно-методическим советом университета.

Линейная эффективная модель экономической системы. Методические указания и индивидуальные задания по курсу высшей математики. — СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2001. — 22 стр.

Методические указания и индивидуальные задания по курсу высшей математики предназначены студентам I курса дневной, вечерней и заочной форм обучения в качестве дополнительного материала для более глубокого усвоения главы "Линейные пространства"раздела "Линейная алгебра".

Составитель: канд. физ.-мат. н., доц. В. Ю. Дорофеев.

Рецензент: канд. экон. н., доц. А. Л. Дмитриев.

Линейная эффективная модель экономической системы

Введение

В данной работе дана геометрическая интерпретация уравнения, которое в математической статистике называется *уравнением множественной регрессии*. На основе геометрического подхода с использованием аппарата теории линейных пространств предлагается его вывод и анализ. Дана геометрическая интерпретация коэффициента множественной корреляции, коэффициентов парной корреляции и коэффициентов частной корреляции. Теоретический анализ сопровождается подробным аналитическим просчётом модели с трёмя признаками. В заключение предлагаются практические задания для самостоятельной работы. В качестве дополнительной литературы, в которой рассмотрен экономический подход при построении и исследовании уравнения множественной регрессии, рекомендуется [2] и [3].

1 Экономическая модель

Пусть задана экономическая система $\mathbf{S}$, которая характеризуется *признаками* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$, принимающими одно числовое значение в фиксированном промежутке времени. Это значение обозначим как $x_j^i, j = 1, 2, \ldots, i = 1, 2, \ldots, n$, где i – номер фиксированного промежутка времени или, в дальнейшем, номер *измерения* (например, экомическая система может характеризоваться таким признаком как прибылью, а числовое значение прибыли – её объём за год и т. д.). Совокупность признаков $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_M \quad (n \gg M)$ экономической системы $\mathbf{S}$ назовём экономической системой $\mathbf{S}_M$ или, в дальнейшем, просто системой $\mathbf{S}_M$.

Пусть из признаков $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_M$ может быть выделен *главный признак* — обозначим его как $\mathbf{y}$, оставшиеся — *привлечённые призна-*

ки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{M-1} : \mathbf{S}_{M-1}$, при этом пусть значение главного признака выражается через значения привлечённых признаков в виде линейного равенства:

$$y^i = a^1 x_1^i + a^2 x_2^i + \ldots + a^{M-1} x_{M-1}^i. \tag{1}$$

Назовём признаки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ системы $\mathbf{S}_k$ *достаточными*, если существует набор коэффициентов $a^1, \ldots, a^k$, что для всех измерений $i, i = 1, 2, \ldots, n$, выполняется равенство (1) (остальные коэффициенты $a^{k+1}, \ldots, a^{M-1}$ в (1) равны нулю). Систему $\mathbf{S}_k$, состоящую из достаточных признаков, назовём *достаточной*. Отдельные признаки $\mathbf{x}_l$ достаточной системы $\mathbf{S}_k$ назовём *избыточными*, если существует набор коэффициентов $a^1, \ldots, a^{l-1}, a^{l+1}, a^k$, что для всех измерений $i, i = 1, 2, \ldots, n$, выполняется равенство (1) (коэффициенты $a^{k+1}, \ldots, a^{M-1}$ равны нулю).

Рассмотрим случай, когда известны не все признаки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{M-1}$, а только часть из них — $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ $(m \leq M-1)$:

$$y^i = \sum_{j=1}^{M-1} a^j x_j^i = \sum_{j=1}^{m} a^j x_j^i + \underbrace{\sum_{j=m+1}^{M-1} a^j x_j^i}_{b+\varepsilon^i}. \tag{2}$$

Обозначим вторую часть суммы в (2) как $b+\varepsilon^i$, где b – постоянная, а ε^i — *остаток* [3], таким образом:

$$y^i = \sum_{j=1}^{m} a^j x_j^i + b + \varepsilon^i. \tag{3}$$

Введём *записи*:

$$y = (y^1, y^2, \ldots, y^n), x_j = (x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^n), j = 1, 2, \ldots, m \tag{4}$$

и

$$\varepsilon = (\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n), u = (1, 1, \ldots, 1), \tag{5}$$

тогда (3) запишем так:

$$y = \sum_{j=1}^{m} a^j x_j + bu + \varepsilon. \tag{6}$$

(Заметим, что записи y, x_j, u и ε не являются векторами, но договоримся, что над ними определены операции сравнения и арифметические действия как над векторами.)

Следует отметить, что по определению экономической системы $\mathbf{S}_M$ в равенстве (1) известно всё, поэтому оно является просто тождеством. В равенстве же (6) будем считать, что известны только y и $x_j, j = 1, 2, \ldots, m$.

Определим запись y_t следующим образом:

$$y_t = \sum_{j=1}^{m} a^j x_j + bu. \tag{7}$$

Равенства (7) назовём *линейной моделью* $\mathbf{S}_m$ *экономической системы* $\mathbf{S}_M$. Возможны следующие случаи:

1. Если признаки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ – достаточны, то в (6) можно так подобрать $a^1, a^2, \ldots, a^m, b$, что $\varepsilon = 0$ (из определения достаточности), поэтому $y_t = y$.

2. Из постановки задачи ясно, что признаки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ – достаточны, но числовые значения x_j^i не точны, что может быть связано, например, с округлением x_j^i. Тогда обычно при всех $a^1, \ldots, a^m, b$ будет $y_t \neq y$.

3. Необходимо исключить часть признаков $(\mathbf{x}_{m+1}, \ldots, \mathbf{x}_{M-1})$ ввиду их малозначительности. Тогда опять $y_t \neq y$ при любых $a^1, \ldots, a^k$.

4. Необходимо проверить гипотезу о достаточности признаков $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ и найти среди них избыточные. И в этом случае обычно $y_t \neq y$ при всех $a^1, \ldots, a^m, b$.

Для всех случаев встаёт вопрос о критерии, по которому следует выбирать $a^1, \ldots, a^m, b$. Будем называть линейную модель S_m экономической системы *эффективной*[1], если вещественные числа $a^1, \ldots, a^m, b$ подобраны так, что сумма квадратов остатков ε^i по всем i-х измерениям минимальна, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y^i - \sum_{j=1}^{m} (a^j x_j^i + b) \right)^2 \to \min . \tag{8}$$

[1] В курсе "Эконометрики"показывается, что коэффициенты $a_1, \ldots, a_m, b$, найденные по (8), *несмещенные* и приводят к минимальной *дисперсии*. Такие оценки называются *эффективными*. Найденное по (8) уравнение (7) называется *уравнением множественной регрессии*, а способ его нахождения (8) – МНК-метод [3].

В дальнейшем будем рассматривать случаи 2 – 4, а случай 1 как их частный случай.

2 Нахождение линейной эффективной модели экономической системы и её исследование.

Сопоставим числу измерений размерность вещественного линейного координатного пространства R^n, а записям y, x_j – векторы в этом пространстве y, x_j. Введём также вектор $u = (1, 1, \dots, 1)$, вектор y_t как в (7) и вектор остатка ε[2], что

$$\varepsilon = y - y_t = y - (\sum_{j=1}^{m} a^j x_j + bu). \tag{9}$$

Введем скалярное произведение в пространстве R^n по правилу: для любых векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$: $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Тем самым получено евклидово пространство E_n (напомню, что *евклидово пространство* – это линейное пространство, в котором задано скалярное произведение). Как известно евклидово пространство *нормируемо* (фактически это означает, что в нём можно ввести длину вектора [1]). Определим норму в этом пространстве следующим образом: $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Так определенная норма вектора $||x||$ совпадает с длиной вектора $|x|$ в геометрическом пространстве, поэтому в дальнейшем будем говорить о длине. В этом случае условие (8) означает: найти такие вещественные числа $a^1, \dots, a^k, b$, чтобы длина вектора ε была минимальна.

Множество векторов вида $a^1x_1 + a^2x_2 + \dots + a^m x_m + bu$ с различными коэффициентами $b, a^j, j = 1, 2, \dots, m$, представляет собой линейную оболочку L, образованную векторами $x_1, x_2, \dots, x_m$ и u в пространстве R^n. В пространстве R^n линейная оболочка L имеет

[2] Заметим, что, произведя указанное сопоставление, мы заменили множество чисел, представленное в виде данных y^i, x_j^i, множеством векторов, поэтому в каждой конкретной задаче целесообразно убедиться, что такая замена возможна или по крайней мере выяснить последствия, к которым она приводит. Признаки могут не образовывать линейного пространства, но обычно оно строится.

геометрический образ. В случае $m = 0$ геометрическим образом является прямая, которая получается как геометрическое множество точек координат вектора вида bu с различными значениями вещественного числа b. При $m > 1$ и неколлинеарных векторах $x_1, \ldots, x_m$ и u – получим плоскость. Обозначим её как ω^{m+1} и в дальнейшем будем считать, что $m > 1$.

На рис. 1 изображены три возможных расположения векторов y, ε и вектора y_t, принадлежащего плоскости ω^{m+1}. Видно, что вектор ε имеет наименьшую длину, когда он перпендикулярен плоскости ω^{m+1}.

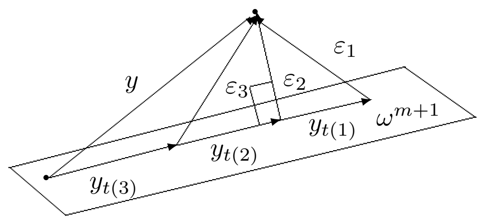

рис. 1.

Следовательно скалярное произведение вектора ε с каждым вектором плоскости ω^{m+1} равно нулю, в том числе с вектором u:

$$(\varepsilon, u) = (y - \sum_{j=1}^{m} a^j x_j - bu, u) = 0. \tag{10}$$

Заметим, что $(u, u) = n$, тогда, вводя обозначения:

$$\bar{y} = \frac{1}{n}(y, u) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y^i, \quad \bar{x}_j = \frac{1}{n}(x_j, u) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_j^i,$$

равенство (10) перепишем так: $\bar{y} = \sum\limits_{j=1}^{m} a^j \bar{x}_j + b$, откуда

$$b = \bar{y} - \sum_{j=1}^{m} a^j \bar{x}_j. \tag{11}$$

Найденное значение для b подставим в уравнение (3):

$$y - \bar{y}u = \sum_{j=1}^{m} a^j (x_j - \bar{x}_j u) + \varepsilon.$$

Введём *центрированные векторы*:

$\overset{\circ}{x}_j = x_j - \bar{x}_j u = (x_j^1 - \bar{x}_j, x_j^2 - \bar{x}_j, \ldots, x_j^n - \bar{x}_j)$,
$\overset{\circ}{y} = y - \bar{y}u = (y^1 - \bar{y}, y^2 - \bar{y}, \ldots, y^n - \bar{y})$,
с помощью которых выражение для вектора остатков ε запишем в виде:

$$\varepsilon = \overset{\circ}{y} - \sum_{j=1}^{m} a^j \overset{\circ}{x}_j \,. \qquad (12)$$

Так как вектор ε перпендикулярен всем векторам плоскости ω^{m+1}, то он будет перпендикулярен и их линейным комбинациям, следовательно и векторам $\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m$. Договоримся совокупность векторов $\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m$ называть системой S_m. Расширим постановку задачи. Пусть требуется:

1) найти такие коэффициенты $a^1, a^2, \ldots, a^m$, чтобы длина вектора $(\overset{\circ}{y} - \sum_{j=1}^{m} a^j \overset{\circ}{x}_j)$ была минимальна. Для выбранных значений x_j^0 по моделе найти значение y_t^0.

2) найти угол φ между векторами $\overset{\circ}{y}$ и $\overset{\circ}{y}_t$, и сделать вывод о принадлежности вектора $\overset{\circ}{y}$ линейной оболочке ω^m, построенной на векторах системы S_m;

3) найти углы ψ_{ij} между всеми парами векторов $\overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m$.

4) на векторах $\overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m$ построить линейную оболочку ω^{m-1}. Представить векторы $\overset{\circ}{y}$ и $\overset{\circ}{x}_1$ в виде суммы векторов: вектора, принадлежащего линейной оболочке ω^{m-1} (векторы $\overset{\circ}{y}^{\,||}$ и $\overset{\circ}{x}_1^{\,||}$ соответственно – *тангенциальные* составляющие векторов $\overset{\circ}{y}$ и $\overset{\circ}{x}_1$) и вектора, перпендикулярного линейной оболочке ω^{m-1} (векторы $\overset{\circ}{y}^{\perp}$ и $\overset{\circ}{x}_1^{\perp}$ соответственно – *нормальные* составляющие векторов $\overset{\circ}{y}$ и $\overset{\circ}{x}_1$), и найти угол ϕ_{01} между нормальными составляющими $\overset{\circ}{y}^{\perp}$ и $\overset{\circ}{x}_1^{\perp}$.

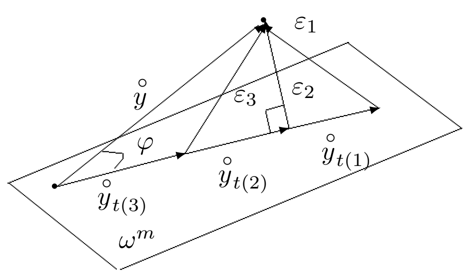

рис. 2.

Решение. 1). Будем считать, что коэффициенты $a^1, a^2, \ldots, a^m$ найдены и пусть $\overset{\circ}{y}_t = \sum_{j=1}^{m} a^j \overset{\circ}{x}_j$.

На рисунке 2 изображены три возможных расположения векторов $\overset{\circ}{y}$, $\overset{\circ}{y}_t$ и ε. Видно, что остаток (12) имеет наименьшую длину, когда вектор ε перпендикулярен плоскости ω^m. Но это возможно только в том случае, если скалярное произведение вектора ε с каждым вектором плоскости ω^m равно нулю, поэтому

$$(\varepsilon, \overset{\circ}{x}_1) = 0, \ldots, (\varepsilon, \overset{\circ}{x}_m) = 0$$

или, подставляя выражение для ε из (12), получим:

$$(\overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x}_j) = \sum_{k=1}^{m} (\overset{\circ}{x}_j, \overset{\circ}{x}_k) a^k, j = 1, 2, \ldots, m,$$

что запишем в матричном виде: $Y = H \cdot A$ или:

$$\begin{pmatrix} (\overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x}_1) \\ (\overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x}_2) \\ \ldots \\ (\overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x}_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_1) & (\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2) & \ldots & (\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_m) \\ (\overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_1) & (\overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_2) & \ldots & (\overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\overset{\circ}{x}_m, \overset{\circ}{x}_1) & (\overset{\circ}{x}_m, \overset{\circ}{x}_2) & \ldots & (\overset{\circ}{x}_m, \overset{\circ}{x}_m) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \ldots \\ a^m \end{pmatrix} \quad (13)$$

Матрица H, стоящая перед вектор-столбцом неизвестных коэффициентов A в (13), называется матрицей Грама векторов $\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2$, $\ldots, \overset{\circ}{x}_m$ [4]. Единственное решение это матричное уравнение имеет только в том случае, если матрица Грама имеет обратную [1]. Допустим, что это так[3]. Тогда

$$A = H^{-1} \cdot Y. \quad (14)$$

2). Из рисунка 2 и определения косинуса угла следует, что угол φ между плоскостью ω^m и вектором $\overset{\circ}{y}$ находится из формулы:

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\overset{\circ}{y}\ \omega^m}) = \frac{(\overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{y}_t)}{|\ \overset{\circ}{y}\ | \cdot |\ \overset{\circ}{y}_t\ |} = \frac{(\overset{\circ}{y}, \sum\limits_{i=1}^{m} a^j\ \overset{\circ}{x}_j)}{|\ \overset{\circ}{y}\ | \cdot |\sum\limits_{i=1}^{m} a^j\ \overset{\circ}{x}_j\ |}. \quad (15)$$

Коэффициенты $a^1, a^2, \ldots, a^m$ в (15) найдены в п. 1).

[3]Если это не так, то необходимо решать проблему мультиколлинеарности, подробно рассмотренную в [3].

По условию число векторов системы S_m, образующих линейную оболочку ω^m, не меньше одного, поэтому косинус угла в (15) всегда не отрицательный. Если в результате вычислений оказалось, что $\cos\varphi = 1$, то вектор y принадлежит линейной оболочке ω^m, в противном случае – не принадлежит.

3). В пространстве R^n угол между любыми двумя векторами $\mathring{y}=\mathring{x}_0, \mathring{x}_i, i = 1,2,\ldots,m$, и $\mathring{x}_j, j = 0,1,\ldots,m$, находится из формулы:

$$\cos\psi_{ij} = \frac{(\mathring{x}_i, \mathring{x}_j)}{|\,\mathring{x}_i\,| \cdot |\,\mathring{x}_j\,|}, \quad i,j = 0,1,\ldots,m. \tag{16}$$

В том случае, если значение косинуса угла в (16) равно ±1, векторы $\mathring{x}_i$ и $\mathring{x}_j$ коллинеарны. Поэтому, если коллинеарный вектор исключить из системы S_m – линейная оболочка ω^m не изменится, не изменится и угол φ. Если же значение косинуса равно 0, то соответствующие векторы перпендикулярны.

4). Как следует из рисунка 3, угол между нормальными составляющими $\mathring{y}^{\perp}$ и $\mathring{x}_1^{\perp}$ находится из формулы:

$$\cos\phi_{01} = \frac{(\mathring{y}^{\perp}, \mathring{x}_1^{\perp})}{|\,\mathring{y}^{\perp}| \cdot |\,\mathring{x}_1^{\perp}|}. \tag{17}$$

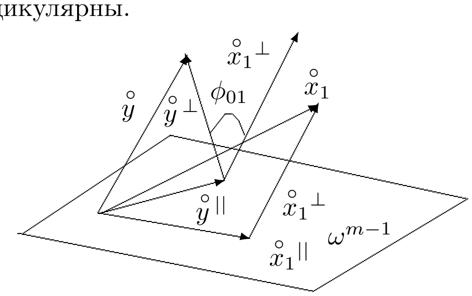

рис. 3.

Если косинус угла ϕ_{01} равен нулю, то исключение вектора $\mathring{x}_1$ не повлияет на угол φ.

Значение $\cos\phi_{01} = \pm1$ означает принадлежность вектора $\mathring{y}$ линейной оболочке ω^m, поэтому исключение вектора $\mathring{x}_1$ из системы векторов S_m приведёт к тому, что вектор $\mathring{y}$, первоначально входящий в линейную оболочку ω^m, не будет содержаться в линейной оболочке ω^{m-1}.

Найдём нормальные составляющие $\mathring{y}^{\perp}$ и $\mathring{x}_1^{\perp}$ в (17).

Выделим плоскость ω^{m-1}, являющуюся линейной оболочкой $(m-1)$ центрированных векторов $\mathring{x}_2, \mathring{x}_3, \ldots, \mathring{x}_m$, и рассмотрим тангенциальную составляющую на эту плоскость векторов $\overset{\circ}{y}$ и $\overset{\circ}{x}_1$. Пусть это будут векторы $\overset{\circ}{y}^{||}$ и $\overset{\circ}{x}_1{}^{||}$ соответственно:

$$\begin{cases} \overset{\circ}{y}^{||} = a_0^2 \overset{\circ}{x}_2 + a_0^3 \overset{\circ}{x}_3 + \ldots + a_0^m \overset{\circ}{x}_m \\ \overset{\circ}{x}_1{}^{||} = a_1^2 \overset{\circ}{x}_2 + a_1^3 \overset{\circ}{x}_3 + \ldots + a_1^m \overset{\circ}{x}_m \, . \end{cases} \tag{18}$$

Тогда векторы

$$\overset{\circ}{y}^{\perp} = \overset{\circ}{y} - \overset{\circ}{y}^{||}, \quad \overset{\circ}{x}_1{}^{\perp} = \overset{\circ}{x}_1 - \overset{\circ}{x}_1{}^{||} \tag{19}$$

являются ортогональными составляющими к плоскости ω^{m-1}. Коэффициенты a_k^j вычисляются также, как и ранее коэффициенты a^j при нахождении линейной эффективной модели $\mathbf{S}_m$, но из $\mathbf{S}_m$ исключается вектор x_1, затем по формулам (13) с помощью матрицы Грама векторов $\overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_3, \ldots, \overset{\circ}{x}_m$ находят a_0^j, после чего вместо вектора y в (13) подставляется вектор x_1 и с помощью матрицы Грама тех же векторов $\overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_3, \ldots, \overset{\circ}{x}_m$ находят коэффициенты a_1^j. Наконец, находят векторы (19) и, в заключении, из формул (16), – угол между векторами $\overset{\circ}{y}^{\perp}$ и $\overset{\circ}{x}_1{}^{\perp}$.

Аналогичным способом находятся углы между векторами $\overset{\circ}{y}^{\perp}$ и $\overset{\circ}{x}_2{}^{\perp}, \overset{\circ}{x}_3{}^{\perp}, \ldots, \overset{\circ}{x}_m{}^{\perp}$ и производится анализ на необходимость введения в модель признаков $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_m$.

3 Некоторые формулы математической статистики

Пусть числовые значения случайных величин $\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ являются числовыми значениями признаков экономической системы $\mathbf{S}_M$. Тогда случайные величины $\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ образуют линейное пространство и их назовём *вектор-признаками*. Образуем новые вектор-признаки $\overset{\circ}{\mathbf{y}}, \overset{\circ}{\mathbf{x}}_1, \overset{\circ}{\mathbf{x}}_2, \ldots, \overset{\circ}{\mathbf{x}}_m$ по формулам

$$\overset{\circ}{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - M\mathbf{y}, \overset{\circ}{\mathbf{x}}_j = \mathbf{x}_j - M\mathbf{x}_j, j = 1, 2, \ldots, m,$$

где $M\mathbf{y}, M\mathbf{x}_j$ — математические ожидания случайных величин $\mathbf{y}, \mathbf{x}_j$ соответственно (в соответствии с прежними обозначениями — это $\bar{y}$ и $\bar{x}_j$).

В теории вероятностей и математической статистике в случае совместного распределения случайных величин $\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$, которые в результате n измерений приняли значения $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$, $(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n)$, $(x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^n)$, $\ldots$, $(x_m^1, x_m^2, \ldots, x_m^n)$ соответственно, имеются следующие формулы:

1. *Коэффициент множественной корреляции* [4]

$$R(\mathbf{y}; \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\mathring{y}^i \, \mathring{y}_t{}^i)}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (\mathring{y}^i)^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (\mathring{y}_t{}^i)^2\right)}}. \qquad (20)$$

Вместо коэффициента множественной корреляции часто используют *коэффициен детерминации* R^2.

2. *Коэффициент парной корреляции:*

$$r(\mathbf{y}, \mathbf{x}_j) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\mathring{y}^i \, \mathring{x}_j{}^i)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\mathring{y}^i)^2 \sum\limits_{i=1}^{n} (\mathring{x}_j{}^i)^2}}. \qquad (21)$$

В этом случае сравнение формул (15) и (16) с (20) и (21) указывают на следующий их геометрический смысл:

– коэффициент множественной корреляции равен углу между вектором $\mathring{y}$ и линейной оболочкой, образованной векторами $\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_m$.

– коэффициентом парной корреляции между случайными величинами $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{x}_j$ равен косинусу угла между векторами $\mathring{x}_i$ и $\mathring{x}_j$.

– коэффициент детерминации показывает относительное значение качества модели: так как $R^2 = \cos^2(\widehat{\omega^m \, \mathring{y}})$, то (рис. 4) $R^2 + \cos^2\beta = 1$, где β – угол между остатком ε и вектором $\mathring{y}_t$. (Заметим, что из геометрического смысла коэффициента множественной корреляции следует,

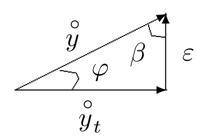

рис. 4.

[4] $\mathring{y}, \mathring{x}_j{}^i \, \mathring{x}_j, a^j$ вычисляются также как и ранее.

что его значение находится в промежутке $[0;1]$.) Ясно, что, чем ближе к единице R^2, тем лучше модель. По теории вероятностей, результат тем более достоверен, чем больше взято измерений, (отсюда требование $n \gg M$). С другой стороны, уменьшая число измерений, можно добиться равенства единице коэффициента детерминации (когда число измерений равно числу достаточных признаков). Эта проблема в математической статистике решается исправлением коэффициента детерминации. За более подробным исследованием этого вопроса отсылаю читателя к [2].

С помощью подобных аналогий можно показать, что косинус угла, заданный формулой (17), в точности равен *коэффициенту частной корреляции* между случайными величинами $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}_1$ при исключении $\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$, или[5]

$$r(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_m) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\overset{\circ}{y}{}^{\perp i} \, \overset{\circ}{x}_1{}^{\perp i})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\overset{\circ}{y}{}^{\perp i})^2 \sum\limits_{i=1}^{n} (\overset{\circ}{x}_1{}^{\perp i})^2}}. \qquad (22)$$

4 Построение эффективной модели экономической системы для 3-х признаков.

Пусть в результате исследования экономической системы $\mathbf{S}$ получено множество вещественных чисел Ω: y^i, x_1^i, x_2^i, $i = 1, 2 \ldots, n$, представленное в виде таблицы 1, так, что столбец этой таблицы соответствует различным признакам, входящим в исследование (число признаков равно числу столбцов), а номер строки (число строк равно n) – номер исследования этого признака (число исследований равно числу строк).

Пусть столбец $\mathbf{y}$ – импорт в млрд руб. и является главным и зависим от остальных признаков, входящих в таблицу, столбец $\mathbf{x}_1$ – валовой продукт в десятках млрд руб., столбец $\mathbf{x}_2$ – потреблении семей в млрд руб.

[5] $\overset{\circ}{y}{}^{\perp}, \overset{\circ}{x}_1{}^{\perp}$ вычисляются как и ранее.

Требуется, для таблицы 1 найти линейную эффективную модель $\mathbf{S}_2$ экономической системы $\mathbf{S}$, сделать её анализ и дать прогноз импорта, если при потреблении семей в 4 млрд валовой продукт будет равен 60 млрд руб.

Таблица 1.

N иссл.	импорт	валовый продукт	потребл. семей
	$\mathbf{y}$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$
1	11	3	1
2	21	5	3
3	24	5	4
4	12	2	2
5	23	9	1
6	19	4	3
7	14	3	2
8	33	8	5
9	25	6	7
10	18	5	2
$1/n\sum$	20	5	3

Решение. Сопоставим признакам векторы в линейном пространстве R^{10}: $\mathbf{y} \to y, \mathbf{x}_1 \to x_1, \mathbf{x}_2 \to x_2$. Затем

I. Найдём коэффициенты a^1, a^2, b по таблице 1. Для этого:
1). Вычислим средние значения: $\bar{y} = 20, \quad \bar{x}_1 = 5, \quad \bar{x}_2 = 3,$
2). Найдём центрированные векторы: $\overset{\circ}{y} = (-9, 1, 4, -8, 3, -1, -6, 13, 5, -2)$, $\overset{\circ}{x}_1 = (-2, 0, 0, -3, 4, -1, -2, 3, 1, 0)$, $\quad \overset{\circ}{x}_2 = (-2, 0, 1, -1, -2, 0, -1, 2, 4, -1)$ и их скалярные произведения:

$$(\overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x}_1) = 111, (\overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x}_2) = 78, |\ \overset{\circ}{x}_1\ |^2 = 44, (\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2) = 11, |\ \overset{\circ}{x}_2\ |^2 = 32. \quad (23)$$

Таким образом уравнение (13) для значений векторов таблицы 1 принимает вид:

$$\begin{pmatrix} 111 \\ 78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 11 \\ 11 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}.$$

Решение ищем с помощью обратной матрицы как в (14):

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1287} \begin{pmatrix} 32 & -11 \\ -11 & 44 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 111 \\ 78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,1 \\ 1,7 \end{pmatrix}.$$

Наконец, находим свободный член $b = 20 - 2,1 \cdot 5 - 1,7 \cdot 3 = 4,4$. В результате получим уравнение линейной эффективной модели экономической системы $\mathbf{S}_2$, заданной таблицей 1:

$$y_t = 2,1x_1 + 1,7x_2 + 4,4. \tag{24}$$

По (24) дадим прогноз импорта y^0 (в млрд руб.) при условии, что валовой продукт равен $x_1^0 = 60$ млрд руб., а потребление семей будет составлять $x_2^0 = 4$ млрд руб.:

$$y^0 = 2,1 \cdot 6 + 1,7 \cdot 4 + 4,4 = 23,8.$$

II. Для оценки степени удовлетворительности описания главного признака именно выбранными признаками (может оказаться, что признаков мало) обычно вычисляют косинус угла между центрированным вектором $\mathring{y}$ и плоскостью ω^m (рис. 5) – коэффициент множественной корреляции (20).

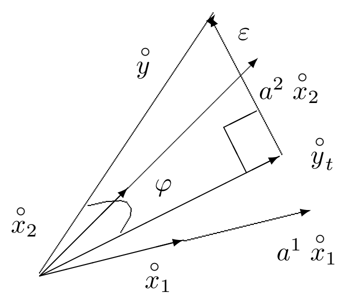

рис. 5.

Найдём тангенциальную составляющую вектора y на плоскости ω^2, которую обозначим как $\mathring{y}_t$:

$\mathring{y}_t = 2,1\ \mathring{x}_1 + 1,7\ \mathring{x}_2 = (-\frac{1090}{143}, 0, \frac{67}{39}, -\frac{3431}{429}, \frac{706}{143}, -\frac{898}{429}, -\frac{2533}{429}, \frac{4168}{429}, \frac{1282}{143}, -\frac{67}{39}) \approx (-7,6; 0; 1,7; -8; 5; -2,1; -5,9; 9,7; 9; -1,7)$.

Следовательно $|\ \mathring{y}_t\ | = \sqrt{350,1} = 18,7; (\mathring{y}, \mathring{y}_t) = 365,9; |\ \mathring{y}\ | = \sqrt{406} = 20,15$.

Откуда $\cos\varphi = \sqrt{\frac{3742}{4147}} \approx 0,95$.

Значение косинуса вычисленного угла помогает проверить предположение о принадлежности вектора $\mathring{y}$ линейной оболочке, образованной векторами $\mathring{x}_j, j = 1, 2, \ldots, m$. В частности, если коэффициент множественной корреляции меньше единицы, то с алгебраической точки зрения необходимо искать более полный набор признаков $\mathbf{x}_j$, претендующих на достаточное описание главного признака $\mathbf{y}$ (на практике такой вывод делается для значений коэффициента множественной корреляции меньше 0.95).

III. По таблице 1 вычислим, используя формулы (21) и (23), коэффициенты парной корреляции.

$$r(x_1, x_2) = \frac{(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)}{|\ \overset{\circ}{x}_1\ | \cdot |\ \overset{\circ}{x}_2\ |} = 0.29,$$

$$r(y, x_1) = \frac{(\overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x}_1)}{|\ \overset{\circ}{y}\ | \cdot |\ \overset{\circ}{x}_1\ |} = 0.83, r(y, x_2) = \frac{(\overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x}_2)}{|\ \overset{\circ}{y}\ | \cdot |\ \overset{\circ}{x}_2\ |} = 0.68.$$

Таким образом, предположение, что главный признак определяется именно двумя выбранными признаками оказывается очень правдоподобным – одного признака явно недостаточно (коффициент парной корреляции $r(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ мал, а сумма квадратов коэффициентов парной корреляции $r(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1)$ и $r(\mathbf{y}, \mathbf{x}_2)$ близка к единице и оба они не малы). Малое значение коэффициента парной корреляции между двумя признаками свидетельствует о том, что они характеризуют главный признак с разных сторон.

IV. Среди имеющихся в исходной системе $\mathbf{S}_2$ признаков, может оказаться, что какой-то, например, первый может являеться избыточным и $x_1^i = \alpha^1 x_2^i$. В этом случае матрица Грама вырождена и обратной не имеет. (Рекомендуется доказать это самостоятельно.) Чтобы найти число избыточных признаков достаточно вычислить ранг матрицы Грама, а для нахождения избытычных признаков провести исследование матрицы Грама на линейную независимость столбцов [1]. Однако чаще всего точной зависимости не бывает. В случае только линейной зависимости между признаками предположение об их "истинной"зависимости можно анализировать с помощью углов ϕ_{ij} по формулам, аналогичным (17).

Выделим линейную зависимость от x_2 в y и x_1 (рис. 6):

$$\overset{\circ}{y}^{\perp} = \overset{\circ}{y} - \overset{\circ}{y}^{||} = \overset{\circ}{y} - a_0\ \overset{\circ}{x}_2, \quad \overset{\circ}{x}_1{}^{\perp} = \overset{\circ}{x}_1 - \overset{\circ}{x}_2{}^{||} = \overset{\circ}{x}_1 - a_1\ \overset{\circ}{x}_2,$$

где $\overset{\circ}{y}^{||}$ и $\overset{\circ}{x}_1{}^{||}$ – тангенциальные составляющие векторов $\overset{\circ}{y}$ и $\overset{\circ}{x}_1$ соответственно на вектор $\overset{\circ}{x}_2$.

Так как задано только два вектора, то можно воспользоваться формулами (23). Найдём a_0 и a_1:

$$a_0 = \frac{(\overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x}_2)}{|\ \overset{\circ}{x}_2\ |^2} = \frac{78}{32}, \quad a_1 = \frac{(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)}{|\ \overset{\circ}{x}_2\ |^2} = \frac{11}{32}.$$

Зная коэффициенты разложения (18) на вектор x_2, вычислим нормальные составляющие (19):

$$\mathring{y}^{\perp} = \mathring{y} - \frac{39}{16}\,\mathring{x}_2 = \left(-\frac{33}{8}; 1; \frac{25}{16}; -\frac{89}{16}; \frac{63}{8}; -1; -\frac{57}{16}; \frac{65}{8}; -\frac{19}{4}; \frac{7}{16}\right);$$

$$\mathring{x}_1^{\perp} = \mathring{x}_1 - \frac{11}{32}\,\mathring{x}_2 = \left(-\frac{21}{16}; 0; -\frac{11}{32}; -\frac{85}{32}; \frac{75}{16}; -1; -\frac{53}{32}; \frac{37}{16}; -\frac{3}{8}; \frac{11}{32}\right).$$

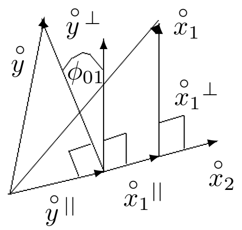

рис. 6.

Следовательно

$$|\,\mathring{x}_1^{\perp}|^2 = \frac{1287}{8},$$

$$|\,\mathring{y}^{\perp}|^2 = \frac{1727}{8},$$

$$(\mathring{y}^{\perp}, \mathring{x}_1^{\perp}) = \frac{1347}{16}.$$

Откуда находим коэффициент частной корреляции между признаками $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}_1$:

$$\cos\phi_{01} = r(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2) = \frac{449}{11\sqrt{2041}} \approx 0,9.$$

Близкое к единице значение коэффициента частной корреляции показывает, что признаки $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}_1$ сильно связаны. Если бы значение коэффициента частной корреляции было малым, то с геометрической точки зрения признак $\mathbf{x}_1$ возможно надо исключить либо как признак, который практически полностью принадлежит линейной оболочке оставшихся признаков, либо как признак, который не описывает главный признак. Возможно речь идёт об ошибочном привлечение признака $\mathbf{x}_1$ к описанию главного признака. (На это может указывать малое значение длины нормальной составляющей по отношению к длине тангенциальной составляющей вектора.) Подобное исследование может оказаться полезным, например, при выяснении укрывается ли фирма от налогов. Имеется много других интересных примеров.

5 Практическое задание: "Построение линейной эффективной модели экономической системы и её исследование"

По имеющимся данным варианта необходимо найти уравнение линейной эффективной модели экономической системы и проверить правильность гипотезы о достаточности описания главного признака $\mathbf{y}$ двумя привлечёнными признаками $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$. Для этого необходимо:

I. По формулам (13) и (11) найти коэффициенты a_1, a_2, b и написать уравнение линейной эффективной модели (7). Дать прогноз значения главного признака $\mathbf{y}$ при известных значения двух других признаков x_1^0 и x_2^0.

II. По формулам (13) – (15) вычислить угол между главным вектор-признаком и плоскостью ω^m и дать геометрическую иллюстрацию результата, указав на рисунке угол φ (как на рис. 2).

III. По формулам (16) вычислить углы ψ_{ij} между всеми парами векторов $\mathring{y}, \mathring{x}_1; \mathring{y}, \mathring{x}_2; \mathring{x}_1, \mathring{x}_2$.

IV. По формулам (18), (19) и (17) вычислить угол ϕ_{01} и дать геометрическую иллюстрацию результата (аналогично рис. 6).

Варианты

1. Прибыль фирмы (в млн руб.) $y = (3.6; 10.4; 11.6; 11.3; 10; 10; 13.4; 9.9; 10; 13.6)$, сырьё (в млн руб.) $x_1 = (1.3; 2.4; 2.4; 1.4; 3.3; 2.3; 2.2; 1.1; 1.2; 3.2)$, объём запасов (в млн руб.) $x_2 = (3.6; 2.6; 2; 3.1; 3.2; 4.2; 4.5; 3.5; 3.4; 2.4)$, $x_1^0 = 4, x_2^0 = 3$.

2. Число впервые использованных в производстве изобретений (тыс. шт.) за год $y = (19; 24; 22; 22; 18; 17; 15; 20; 23; 19)$, число зарегестрированных в Госреестре изобретений (тыс. шт.) $x_1 = (62; 80; 83; 84; 85; 81; 75; 90; 94; 78)$, число поступивших заявок в Госкомизобретений (тыс. шт.) $x_2 = (146; 156; 169; 175; 149; 120; 110; 170; 180; 160)$, $x_1^0 = 50, x_2^0 = 203$.

3. Урожай (ц/га) $y = (9; 9.5; 11; 11.5; 15.8; 20; 18; 15; 18; 14)$, качество почв (баллы) $x_1 = (60; 65; 70; 70; 77; 85; 82; 78; 80; 75)$, количество осадков за период вегетации (мм) $x_2 = (163; 180; 178; 228; 288; 325; 300; 220; 250; 210)$, $x_1^0 = 14, x_2^0 = 188$.

4. Импорт товаров (млн руб.) $y = (50; 60; 65; 70; 50; 55; 60; 45; 70;$

80), транспортные услуги (млн руб.) $x_1 = (1;3;2;2;2;3;4;4;6;7)$, поездки (млн руб.) $x_2 = (7;5;5;10;8;11;14;15;15;18)$, $x_1^0 = 4, x_2^0 = 3$.

5. Зарегистрировано родившихся (тыс. чел.) $y = (62;62;47;32;35;60;38;47;60;55)$, зарегистрировано браков (тыс. чел.) $x_1 = (58;55;46;40;40;70;50;55;60;58)$, смертность (тыс. чел.) $x_2 = (52;58;63;86;84;90;20;40;60;50)$, $x_1^0 = 44, x_2^0 = 63$.

6. Экспорт товаров и услуг (в тыс. руб.) $y = (80;90;100;105;90;26;18;70;85;66)$, оплата труда получателя (в млн руб.) $x_1 = (1;2;1;2;4;1;6;7;9;5)$, инвестиционные доходы (в тыс. руб.) $x_2 = (3;4;4;3;1;1;1;3;4;2)$, $x_1^0 = 8, x_2^0 = 6$.

7. Инвестиционные облигации федерального займа (млн руб.) $y = (23;21;35;9;27;33;41;58;36;\ 29)$, облигации федерального займа (млн руб.) $x_1 = (95;88;114;88;105;130;150;170;100;102)$, коммерческие облигации (млн руб.) $x_2 = (116;99;120;102;118;130;140;143;110;118)$, $x_1^0 = 33, x_2^0 = 113$.

8. Темп инфляции в неделю $y = (0.2;0.1;0.1;0.2;0.3;0.4;0.3;0.7;0.2;0.1)$, ставки по рублёвым депозитам на месяц $x_1 = (17.7;17.1;17.9;17.1;17.1;16.9;17.1;17.8;16.6;16.8)$, ставки по рублёвым депозитам на срок 3 месяца $x_2 = (27.9;28.2;28;28;28.4;25;27;28;25;27)$, $x_1^0 = 0.7, x_2^0 = 1$ (всё в процентах).

9. Конечный продукт (в млн руб.) $y = (14;4;5;5;2;6;8;7;12;14)$, производственные фонды (в млрд руб.) $x_1 = (4;3;2;2;1;1;5;6;4;7)$, трудовые ресурсы (в млн чел.) $x_2 = (2;7;6;2;3;1;2;4;5;7)$, $x_1^0 = 9, x_2^0 = 7$.

10. Производство угля $y = (12;10;8;4;3;11;8;20;16;17)$, производство нефти $x_1 = (2;5;7;4;3;3;2;\ 6;4;8)$, производство меди $x_2 = (1;4;5;10;4;2;4;8;4;6)$, $x_1^0 = 14, x_2^0 = 11$ (всё в млн тонн).

11. Продукция промышленности (млрд руб.) $y = (3.2;3;2;1.9;2.6;3.2;4.1;3.3;2.9;3.6)$, безработные (млн чел.) $x_1 = (2.5;2;0.8;1.3;1.1;2.4;2.6;3.1;3.6;2.8)$, бедное население (десятки млн чел.) $x_2 = (2;2;1.8;1.4;1.8;2.0;2.1;3.2;2.7;3.3)$, $x_1^0 = 2.4, x_2^0 = 3$.

12. Количество наименований товара $y = (40;65;50;28;146;48;33;28;60;71)$, комплексная оценка торговой системы $x_1 = (10;14;13;15;19;7;18;16;33;14)$, качество системы оплаты $x_2 = (30;26;7;16;7;3;16;23;19;31)$, $x_1^0 = 24, x_2^0 = 22$.

13. Уровень рентабельности по различным отраслям производства $y = (18;22;24;26;29;11;42;37;16;33)$, уровень их убыточности $x_1 = (8;11;12;8;10;12;18;31;16;27)$, количество убыточных пред-

приятий к их общему числу $x_2 = (10;3;2;4;4;16;18;22;19;11)$, $x_1^0 = 24, x_2^0 = 9$.

14. Индекс потребительских цен $y = (8,9,12,10,8,9,12,11,9,10)$, индекс цен производителей $x_1 = (3,4,11,8,6,8,11,8,4,8)$, обменный курс рубля (руб./долл.) $x_2 = (6.2,6.7,6.8,6.2,6.1,6.4,6.8,6,6.1,6.2)$, $x_1^0 = 7, x_2^0 = 7$.

15. Число маршрутов автобусов $y = (97;101;100;102;98;102;111;113;114;115)$, число маршрутов трамваев $x_1 = (20;17;17;18;18;19;20;21;21;22)$, число маршрутов троллейбусов $x_2 = (18;18;19;21;22;24;21;23;23;25)$, $x_1^0 = 26, x_2^0 = 30$.

16. Перевозка грузов предприятиями транспорта (млн/тонн) $y = (24;28.6;25.2;28.6;44.3;40.1;40;58;40;42)$, грузооборот предприятий (млрд тонн/км) $x_1 = (3.2;2.5;3.5;2.6;4.6;5.2;5.9;8.9;6.1;7.1)$, пассажирооборот транспорта общего пользования (млн час./км) $x_2 = (2.4;5.3;2.3;5.1;7.1;4.8;3.2;4.2;2.8;1.8)$, $x_1^0 = 4, x_2^0 = 3$.

17. Использование производственных мощностей в машиностроении $y = (42;40;3;39;49;38;50;73;80;90)$, цветной металлургии $x_1 = (4.8;3.6;1.6;2.6;4.2;1.2;2.7;5;5.3;6.3)$, затраты электроэнергии $x_2 = (2.1;2.8;3;3.3;3.7;4.3;5.1;7.1;8.1;8.9)$, $x_2^0 = 54, x_1^0 = 3.7$ (всё в процентах) .

18. Урожайность (ц/га) $y = (9;9.5;11;11.5;15;13;10;13;17;19)$, качество почв $x_1 = (60;65;70;70;77;74;71;77;81;83)$, количество осадков (мм/мес.) $x_2 = (163;180;178;228;288;242;227;255;293;310)$, $x_1^0 = 90, x_2^0 = 200$.

19. Валовый доход (тыс. руб./га) $y = (69;77;58;50;77;78;60;73;80;60)$, затраты труда (час./га) $x_1 = (188;232;173;183;236;243;221;231;250;229)$, доля пашни (процент от площади всех хозяйственных угодий), $x_2 = (42;50;48;52;54;42;51;58;63;38)$, $x_1^0 = 66, x_2^0 = 77$.

20. Число проектов во Франции $y = (140;101;53;48;19;38;40;60;55;47)$, инвестиции (млрд фр. франков) $x_1 = (27;18;10;8;6;11;15;20;18;16)$, число занятых в пректах (тыс. чел.) $x_2 = (12;8;6;5;3;4;5;5;6;5)$, $x_1^0 = 44, x_2^0 = 4.1$.

21. Производство масла (млн тонн) $y = (1.7;1.6;2;3.1;1.9;2;2.5;3.2;2.8;2.9)$, валовый надой (млн тонн) $x_1 = (7;6;8;10;8;9;12;14;13;13)$, численность скота (млн шт.) $x_2 = (6;3;8;13;7;8;12;14;11;10)$, $x_1^0 = 5, x_2^0 = 15$.

22. Объём призводства (тыс. тонн) $y = (43;69;9;65;99;32;60;70;80;90)$, себестоимость продукции (тыс. руб./тонна) $x_1 = (4.4;7.1;$

$1; 2.4; 9.3; 6.3; 5.1; 3.1; 5.1; 6.3)$, затраты на производство (млн руб.) $x_2 = (176; 145; 52; 375; 58; 222; 143; 125; 133; 127)$, $x_1^0 = 33$, $x_2^0 = 190$.

23. Число дней с осадками $y = (19; 17; 19; 20; 21; 28; 30; 44; 22; 31)$, с метелью $x_1 = (4; 7; 8; 7; 3; 9; 11; 14; 18; 20)$, с туманом $x_2 = (3; 8; 6; 6; 4; 2; 7; 8; 9; 11)$, $x_1^0 = 54$, $x_2^0 = 3.7$.

24. Ставки по депозитам $y = (19.8; 19.5; 18.5; 18.6; 18.7; 17.4; 19.7; 17.3; 18; 19)$, доходность валютных облигаций РФ $x_1 = (12.5; 12.3; 12.2; 12; 11.3; 10.7; 13.1; 12.1; 12.5; 12.9)$, доходность облигаций (ВЭБ) $x_2 = (33.8; 33.3; 32.2; 30.9; 29.5; 25.3; 28.7; 25; 30; 36.3)$, $x_1^0 = 13$, $x_2^0 = 37$ (всё в процентах).

25. Энергетическая ценность на 100 грамм продукта (ккал) $y = (61; 52; 77; 161; 95; 740; 160; 385; 280; 190)$, жиры (грамм) $x_1 = (3.5; 2.5; 2; 15; 2; 82; 16; 19; 23; 19)$, углеводы (грамм) $x_2 = (4.7; 4.3; 12; 3; 3.5; 0.7; 3; 4.6; 2.3; 3.3)$, $x_1^0 = 4$, $x_2^0 = 3.2$.

26. Число умерших на 1000 чел. населения $y = (17; 16.7; 14.6; 14.1; 14; 15; 15; 17; 18; 19)$, число дошкольных учреждений $x_1 = (434; 419; 401; 375; 369; 333; 421; 256; 222; 339)$, число амбулаторно-поликлинических учреждений $x_2 = (159; 176; 180; 178; 171; 173; 174; 160; 183; 186)$, $x_1^0 = 14$, $x_2^0 = 190$.

27. Добыча нефти (млрд долл.) $y = (42; 40; 3; 39; 49; 38; 50; 73; 80; 90)$, добыча железной руды (млрд долл.) $x_1 = (2.1; 2.8; 3; 3.3; 3.7; 4.3; 5.1; 7.1; 8.1; 8.9)$, добыча угля (млрд долл.) $x_2 = (4.8; 3.6; 1.6; 2.6; 4.2; 1.2; 2.7; 5; 5.3; 6.3)$, $x_1^0 = 54$, $x_2^0 = 3.7$.

28. Безработные (млн чел.) $y = (17; 14; 29; 18; 18; 28; 30; 23; 20; 30)$, инфляция в развитых странах (проценты) $x_1 = (3; 4; 5; 4; 3; 3; 5; 2.1; 3.1; 2.9)$, инфляция в развивающихся странах (проценты) $x_2 = (49; 31; 76; 42; 45; 55; 43; 33; 30; 90)$, $x_1^0 = 4$, $x_2^0 = 37$.

29. Доходы (млрд руб.) $y = (17; 35; 54; 83; 106; 88; 38; 73; 83; 66)$, налоговые доходы (млрд руб.) $x_1 = (16; 33; 50; 69; 88; 43; 51; 71; 81; 89)$, расходы (млрд руб.) $x_2 = (20; 44; 80; 111; 142; 112; 127; 145; 155; 163)$, $x_1^0 = 78$, $x_2^0 = 37$.

30. Индекс цен производителей $y = (2; 4; 3; 3; 4; 3; 5; 3; 1; 2)$, индекс цен на промышленные товары $x_1 = (2; 2; 3; 3.3; 3.7; 4.3; 2.1; 3.1; 2.2; 3.1)$, индекс цен на сельскохозяйственные товары $x_2 = (2.8; 3.6; 1.6; 2.6; 4.2; 1.2; 2.7; 1; 2.3; 1.3)$, $x_1^0 = 3$, $x_2^0 = 3.7$.

Список литературы

[1] Беклемишев Д. В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* – М.:Наука, 1987.

[2] Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А. *Эконометрика. Начальный курс.* – М.:Дело, 1998.

[3] Доугерти К. *Введение в эконометрику.* – М.:ИНФРА-М, 1998.

[4] Дорофеев В.Ю. *Линейная модель экономической системы.* СПб.:Известия СПбГУЭФ, N2, стр. 22 – 31, 2002.

ЛИНЕЙНАЯ ЭФФЕКТИВНАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Методические указания и индивидуальные задания
по курсу высшей математики

Редактор *Е. Д. Груверман.*
Лицензия ЛР N 020412 от 12.02.97.

Подписано в печать 30.01.01. Формат 60×84. 1/16. Бум. газетная.
Печ. л. 1,4. Бум. л. 0,7. РТП изд-ва СПбГУЭФ. Тираж. 500 экз. Зак. 54.

Издательство Санкт-Петербургского государственного
университета зкономики и финансов.
191023, Санкт-Петербург, Садовая ул., д. 21.