ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Самостоятельная работа № 1
по математике

Графический метод
в задаче линейного программирования

Вариант № ..
студ. ФИО
группа ...
преп.:

Санкт-Петербург
2019

1 Пример самостоятельной работы

1.1 Задание и условие в табличной форме

Рекламному отделу компании «Логистик» необходимо сделать два вида рекламной продукции: биллборды – BB и суперсайты – SC. Известна цена аренды в месяц одного рекламо-места, стоимость его производства и обслуживания, а также объём выделяемых средств по каждой из статей расходов, которые указаны в таблице. Произведена также оценка эффективности одного рекламо-места.

Таблица № 1

статья расходов	вид рекламы		объём финансов
	BB	SC	
аренда	2	3	420
обслуживание	2	1	200
производство	4	1	360
эффективность	40	50	

Требуется определить, сколько рекламо-мест биллбордов и суперсайтов должен использовать рекламный отдел, чтобы достичь наибольшей эффективности.

Д. У. биллбордов необходимо использовать не менее 50 штук.

1.2 Математическая формулировка задачи

Введём неизвестные x_1 и x_2, обозначающие число рекламо-мест биллбордов и суперсайтов соответственно, которые должен заказать рекламный отдел. Неизвестные x_1 и x_2 должны удовлетворять условиям того, что расход финансов на создание рекламо-мест не может превышать выделенного объёма. Кроме того, из определения x_1 и x_2 ясно, что они могут принимать лишь неотрицательные значения:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 420 \\ 2x_1 + x_2 \leq 200 \\ 4x_1 + x_2 \leq 360 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Система неравенств (1) выражают все условия, налагаемые на x_1 и x_2 из таблицы № 1. Любая пара значений x_1 и x_2, удовлетворяющая системе неравенств (1), будет определять один из допустимых вариантов плана рекламного отдела. Таких допустимых вариантов будет бесчисленное множество. Даже если учесть условие целочисленности значений x_1 и x_2, то и в этом случае различных допустимых вариантов плана будет хотя и не бесконечное множество, но достаточно большое число. Согласно условию задачи, необходимо выбрать такой вариант плана, для которого суммарная эффективность окажется наибольшей. Этот вариант плана является оптимальным. Оптимальная эффективность, которую обозначим через z, будет определяться из следующей *целевой функции*:

$$z = 40x_1 + 50x_2 \to \max\,. \tag{2}$$

Таким образом исходная задача может быть сформулирована математически следующим образом.

Среди множества решений системы неравенств (1) найти такое решение (такую пару значений x_1 и x_2), для которого целевая функция z в (2) достигнет наибольшего значения.

Математическая модель задачи, заданная выражениями (1 – 2), получила название линейной модели, так как во все выражения неизвестные x_1 и x_2 входят только в первой степени. По этой же причине подобные задачи называются задачами линейного программирования.

1.3 Графический метод

В случае, когда в задаче линейного программирования всего две переменные, для её решения можно воспользоваться графическим методом. Этот способ наглядно демонстрирует основные идеи метода линейного программирования.

Запишем математическую формулировку задачи, объединив (1 – 2) вместе:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 420 \\ 2x_1 + x_2 \le 200 \\ 4x_1 + x_2 \le 360 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{3}$$

$$z = 40x_1 + 50x_2 \to \max$$

Здесь x_1 – количество изделий P_1, x_2 – количество изделий P_2, а прибыль предприятия – через z.

Вначале рассмотрим первое неравенство системы (3):

$$2x_1 + 3x_2 \le 420 \tag{4}$$

Границу области решений этого неравенства находят заменой неравенства на равенство:

$$2x_1 + 3x_2 = 420 \tag{5}$$

Множество значений (x_1, x_2), удовлетворяющих уравнению (5), соответствует прямой, которую обозначим как l_1. Изобразим эту прямую, проведя её через две точки. Точки получим, подставляя в (5) нулевые значения одной координаты и по ним находя значения другой координаты:

$$\begin{array}{llll} \text{если} \quad x_1 = 0, & \text{то} \quad x_2 = 420/3 = 140, & A(0,140), \\ \text{если} \quad x_2 = 0, & \text{то} \quad x_1 = 420/2 = 210, & E(210,0). \end{array}$$

Через точки A и E проведём прямую l_1 (рис. 1).

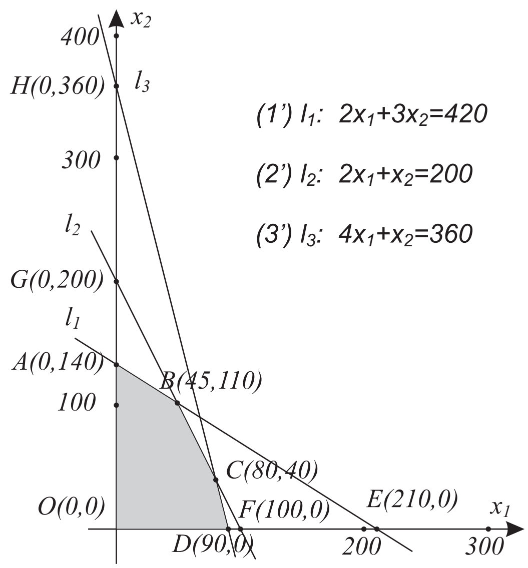

рис. 1.

Рассмотрим второе неравенство системы (3):

$$2x_1 + x_2 \leq 200 \tag{6}$$

Границу области решений этого неравенства находят заменой неравенства на равенство:

$$2x_1 + x_2 = 200 \tag{7}$$

Известно, что решением неравенства (4) является полуплоскость, ограниченная прямой l_1. Чтобы найти, какая из двух полуплоскостей, на которые делит плоскость X_1OX_2, является решением (4) прямая l_1, достаточно подставить координаты какой-либо из точек полуплоскостей в неравенство (4) и посмотреть, выполняется ли оно в выбранной точке. Если выполняется, то решением неравенства является полуплоскость, содержащая эту точку, в противном случае – другая полуплоскость. В качестве «тестовой точки» обычно берут начало координат – O(0,0). В нашем случае будет $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \leq 420$ – верно. Следовательно, решением неравенства (4) является полуплоскость, содержащая точку O(0,0) и ограниченная прямой l_1.

Множество значений (x_1, x_2), удовлетворяющих уравнению (7), соответствует прямой, которую обозначим как l_2. Изобразим эту прямую, проведя её через две точки. Точки получим, подставляя в (7) нулевые значения одной координаты и по ним находя значения другой координаты:

если $x_1 = 0$, то $x_2 = 200$, $G(0, 200)$,
если $x_2 = 0$, то $x_1 = 200/2 = 100$, $F(100, 0)$.

Через точки F и G проведём прямую l_2 (рис. 1).

Для нахождения решений неравенства (6) в качестве «тестовой точки» возьмём начало координат – O(0,0). Так как $2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \leq 200$ – верно, то решением неравенства (6) является полуплоскость, содержащая точку O(0,0) и ограниченная прямой l_2.

Рассмотрим третье неравенство системы (3):

$$4x_1 + x_2 \leq 360 \tag{8}$$

Границу области решений этого неравенства находят заменой неравенства на равенство:

$$4x_1 + x_2 = 360 \tag{9}$$

Множество значений (x_1, x_2), удовлетворяющих уравнению (9), соответствует прямой, которую обозначим как l_3. Изобразим эту прямую, проведя её через две точки. Точки получим, подставляя в (9) нулевые значения одной координаты и по ним находя значения другой координаты:

если $x_1 = 0$, то $x_2 = 360$, $H(0, 360)$,
если $x_2 = 0$, то $x_1 = 360/4 = 90$, $D(100, 0)$.

Через точки H и D проведём прямую l_3 (рис. 1).

Для нахождения решений неравенства (8) в качестве «тестовой точки» возьмём начало координат – O(0,0). Так как $4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \leq 360$ – верно, то решением неравенства (8) является полуплоскость, содержащая точку O(0,0) и ограниченная прямой l_3.

В результате получим область, заштрихованную на рисунке 1.

Перейдём к поиску оптимального решения, которое соответствует максимуму целевой функции (2). Для этого найдём значение целевой функции $z(x, y)$ во всех угловых точках.

$z(A) = z(0, 140) = 40 \cdot 0 + 50 \cdot 140 = 7000$

$z(D) = z(90, 0) = 40 \cdot 90 + 50 \cdot 0 = 3600$

Из рис. 1 видим, что точка B является точкой пересечения прямых l_1 и l_2. Найдём координаты этой точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 420 \\ 2x_1 + x_2 = 200 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_2 = 210 \\ 4x_1 = 180 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 45 \\ x_2 = 110. \end{cases}$$

При данных значениях x_1 и x_2 находим

$z(B) = z(45, 110) = 40 \cdot 45 + 50 \cdot 110 = 7300.$

Из рис. 1 видим, что точка C является точкой пересечения прямых l_3 и l_2. Найдём координаты этой точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 360 \\ 2x_1 + x_2 = 200 \end{cases} \tag{10}$$

Вычитая из верхнего равенства нижнее, находим: $2x_1 = 160$. Откуда получим, что $x_1 = 80$. Подставим найденное значение x_1 в нижнее уравнение системы 10. Откуда

$2 \cdot 80 + x_2 = 200$. Следовательно $x_2 = 40$. Откуда получим координаты точки $C = (80, 40)$. Найдём значение целевой функции в этой точке.

$z(C) = z(80, 40) = 40 \cdot 80 + 40 \cdot 40 = 4800.$

Из значений целевой функции $z = z(x_1, x_2)$ в угловых точках полученного множества:

$z(O) = 0, \qquad z(A) = 7000, \qquad z(B) = 7300,$

$z(C) = 4800, \qquad z(D) = 3600$

выбираем наибольшее $\max z = z(B) = z(45, 110) = 7300.$

Ответ: для того чтобы получить наибольшую эффективность рекламной продукции необходимо использовать 45 биллбордов и 110 суперсайтов. При этом будет достигнута наибольшая эффективность, равная 7300.

1.4 Решение с Д. У.

математическая формулировка задачи с дополнительным условием имеет вид:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 420 \\ 2x_1 + x_2 \le 200 \\ 4x_1 + x_2 \le 360 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 50. \end{cases} \tag{11}$$

$$z = 40x_1 + 50x_2 \to \max$$

в обозначениях предыдущего решения.

Строим область планов как в предыдущей задаче и получаем рис. 2

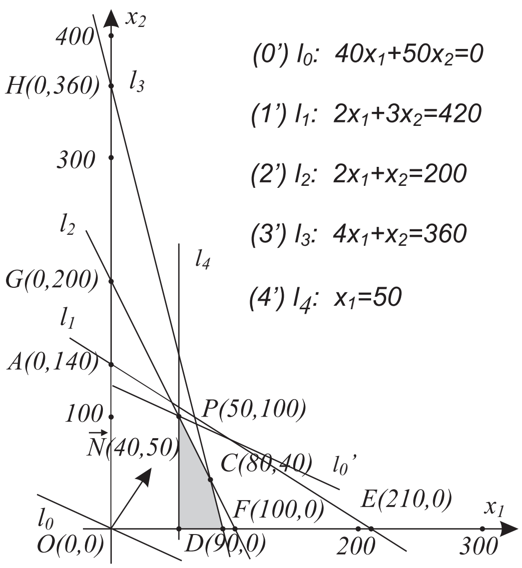

рис. 2.

Для нахождения наилучшего значения целевой функции в области планов можно воспользоваться рассуждениями предыдущего параграфа. Но можно точку наилучшего решения найти другим способом – с помощью градиента функции.

Строим вектор-градиент целевой функции. Для этого находим частные производные целевой функции $z = z(x_1, x_2) = 40x_1 + 50x_2$.

$z'_{x_1} = 40, \qquad z'_{x_2} = 50.$

Откуда находим

$grad\ z = z'_{x_1}\vec{i} + z'_{x_2}\vec{j} = 40\vec{i} + 50\vec{j} = \vec{N}$.

Этот вектор показывает направление роста целевой функции. На линии перпендикулярной этому вектору значение целевой функции постоянно. Поэтому строим линию уровня l_0 как линию перпендикулярную вектору градиенту $\vec{N}$, проходящую через начало координат и имеющую вид $40x_1+50x_2 = 0$. (Можно строить эту прямую проходящей через любую точку. Достаточно в целевой функции положить z равным любому значению, например, нулю.) Двигаем прямую l_0 параллельно самой себе в направлении вектора-градиента $grad\ z$. Последняя точка области при движении прямой $l_0 \to l'_0$ – точка P даст оптимальное значение функции $z(x_1, x_2)$.

Для такого метода нет необходимости находить значение целевой функции во всех точках и их сравнивать.

Находим значение целевой функции в точке P: видим, что переменная x_1 в этой точке равна 50. Так как точка P получилась как точка пересечения прямых l_4 и l_2, что видно из рисунка 2, то в уравнение линии l_2 подставим $x_1 = 50$:

$2{\cdot}50+x_2 = 200$. Откуда находим $x_2 = 100$. Находим значение целевой функции в точке P.

$z(P) = z(50, 100) = 40 \cdot 50 + 50 \cdot 100 = 7000$.

Ответ: для того чтобы получить наибольшую эффективность рекламной продукции необходимо использовать 50 биллбордов и 100 суперсайтов. При этом будет достигнута наибольшая эффективность, равная 7000.

2 Обязательные требования к самостоятельной работе

1. Титульный лист.

2. Запись текста условия.

3. Решение должно содержать две части (как в образце): одно без Д. У., второе – с Д.У. и опираться на графический способ решения. Необходимо представить математические формулировки обоих задач.

4. Численные расчёты и их анализ.

5. В заключении каждой из частей необходим полный ответ.