Линейная балансовая модель.

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из n взаимосвязанных отраслей производства при условии, что каждая отрасль выпускает только один продукт.

Пусть: x_i – валовая продукция i-ой отрасли, y_i – конечный продукт i-ой отрасли, x_{ij} – часть продукции i-ой отрасли, которая потребляется j-ой отраслью для выпуска продукции $x_j, i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Математическая модель системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 - (x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n}) = y_1 \\ x_2 - (x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n}) = y_2 \\ \ldots \\ x_n - (x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn}) = y_n. \end{cases}$$

Эти равенства называются *балансовыми*. Они содержат $n + 2n$ переменных, поэтому не имеет содержательного исследования. Оказывается, что в одном частном случае можно предложить изящное решение, предложенное ещё в 1939 году видным математиком, русского происхождения, Леонтьевым: в том случае, когда внутри отраслей не происходят структурные изменения, отношения $\dfrac{x_{ij}}{x_j} = \dfrac{x'_{ij}}{x'_j} = a_{ij}$ постоянны. Убедимся в этом на примере предприятия: если к, например, шести работающим цехам 1-го предприятия добавить точно такой же седьмой цех, то потребление этим предприятием продукции x_{11} для производства 1-го вида продукта увеличится на $\frac{1}{7}$, но при этом производство x_1-го вида продукта также увеличится на $\frac{1}{7}$. Следовательно $a_{11}{}' = \dfrac{x_{11} + \frac{1}{7}x_{11}}{x_1 + \frac{1}{7}x_1} = a_{11}$.

Аналогично получим $a_{21}{}' = \dfrac{x_{21} + \frac{1}{7}x_{21}}{x_1 + \frac{1}{7}x_1} = a_{21}$ и так далее до a_{n1}. Остальные a_{ij} останутся без изменения. Таким образом, будем считать, что $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ – *структурные постоянные* неизменны в некотором промежутке времени, охватывающем как истекший так и планируемый период. Эти коэффициенты ещё называются *коэффициентами прямых затрат*: если объём выпуска x_j вида продукции равен единице, то $a_{ij} = x_{ij}$, то есть коэффициенты a_{ij} показывают, сколько продукции i-ой отрасли затрачивается на производство единицы продукции j-ой отрасли.

Итак, имеем условие линейности прямых затрат:

$$x_{ij} = a_{ij}x_j, \tag{1}$$

когда затраты i-ой отрасли в j-ую пропорциональны валовому выпуску j-ой отрасли. Подставим (1) в балансовые равенства и получим *линейные балансовые уравнения*:

$$\begin{cases} x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) = y_1 \\ x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) = y_2 \\ \ldots \\ x_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n) = y_n, \end{cases}$$

содержащую уже n неизвестных.

Введём некоторые общепринятые обозначения:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} - \textit{ассортиментный вектор}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} - \textit{вектор-план},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{матрица прямых затрат},$$

с учётом которых линейные балансовые уравнения запишем в компактной форме: $X = (E - A)X = Y$.

Итак, линейная балансовая модель позволяет по заданному вектор-плану X находить ассортиментный вектор Y (конечный продукт). Однако более интересна обратная задача: нахождение вектор-плана X по заданному вектору Y. Будем считать, что матрица $E - A$ не особенная, (имеет обратную) тогда

$$X = (E - A)^{-1}Y = SY. \tag{2}$$

где $S = (E - A)^{-1}$ *матрица полных затрат.*

В том случае, если матрица S в (2) существует и неотрицательна (то есть все $s_{ij} \geqslant 0$), модель называется *продуктивной.*

Пример: экономическая система состоит из двух отраслей и за предшествующий период характеризуется следующей таблицей межотраслевых потоков:

N	Потребление		конечный
отрасли	I	II	продукт
1.	100	160	240
2.	275	40	85

Требуется найти валовый вектор продукции, если задан вектор-план $Y = (480, 170)$.

Для решения задачи нам нужны следующие данные:

– затраты: по 1 отрасли $100 + 160 = 260$
по 2 отрасли $275 + 40 = 315$.

– валовой выпуск: по 1 отрасли $260 + 240 = 500$
по 2 отрасли $315 + 85 = 400$.

Представим исходную таблицу в таком виде:

N	Потребление		Конечный	Итого	Валовый
отрасли	I	II	продукт	затрат	выпуск
1.	100	160	240	260	500
2.	275	40	85	315	400

Найдём матрицу коэффициентов прямых затрат A:

$$a_{11} = \frac{100}{500} = 0.2 \quad a_{21} = \frac{275}{500} = 0.55 \qquad A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.55 & 0.1 \end{pmatrix}$$
$$a_{12} = \frac{160}{400} = 0.4 \quad a_{22} = \frac{40}{400} = 0.1$$

Вычислим вспомогательную матрицу $E - A$:

$$E-A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.55 & 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0.2 & -04 \\ -0.55 & 1-0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 \\ -0.55 & 0.9 \end{pmatrix}$$

и найдём матрицу полных затрат S (ей обратную):

$$S = (E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.8 & 0.8 \\ 1.1 & 1.6 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Сделаем проверку:

$$\begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 \\ -0.55 & 0.9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.8 & 0.8 \\ 1.1 & 1.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.44 - 0.44 & 0.64 - 0.64 \\ -0.99 + 0.99 & -0.44 + 1.44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица найдена верно, таким образом матрица полных затрат имеет вид (3). Вычислим план X на будущий период:

$$X = SY = \begin{pmatrix} 1.8 & 0.8 \\ 1.1 & 1.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 480 \\ 170 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 800 \end{pmatrix}$$

Ответ: для изготовления конечного продукта в размере $Y = (480, 170)$ при сохранении структуры производства необходимо запланировать валовый продукт в объёме: $X = (1000, 800)$.