ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Самостоятельная работа № 2 по математике

«Методы линейной алгебры и математического анализа»

Вариант № ….

студ. ФИО

группа …

преп.:

Санкт-Петербург

2019

Часть I. Методы линейной алгебры.

Системы линейных уравнений и их решения.

1. Матричная форма системы линейных уравнений и её решение.

Записать систему линейных уравнений в матричном виде и указать её матричное решение, в случае единственности решения.

а). $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -7 \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ 5x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -2 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 9x - 12y + z = 4 \\ 3x + 4y + 6z = 8 \\ 8x + 9y + z = -2 \end{cases}$

Решение.

а). Введём матрицу коэффициентов $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 4 & -2 \\ 5 & -7 & 9 \end{pmatrix}$, вектор-столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ и вектор-столбец переменных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Тогда систему линейных уравнений запишем в матричном виде $AX = B$ или $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 4 & -2 \\ 5 & -7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$. Так как по условию имеется единственное решение, то существует обратная матрица для матрицы A, которую обозначим как A^{-1}, поэтому решение системы можно записать в матричном виде как $X = A^{-1}B$ или $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 4 & -2 \\ 5 & -7 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$.

б). Введём матрицу коэффициентов $A = \begin{pmatrix} 9 & -12 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$, вектор-столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ и вектор-столбец переменных $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Тогда систему линейных уравнений запишем в матричном виде $AX = B$ или $\begin{pmatrix} 9 & -12 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$. Так как по условию имеется единственное решение, то существует обратная матрица для матрицы A, которую обозначим как A^{-1}, поэтому решение системы можно записать в матричном виде как $X = A^{-1}B$ или $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -12 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Методы решения системы линейных уравнений.

1). Решить систему с помощью обратной матрицы:

а). $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 4x - 12y = 9 \\ 3x + 7y = 5 \end{cases}$

Решение а). Из предыдущего параграфа следует, что если записать систему линейных уравнений а) с помощью обратной матрицу, то получим $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$. Известно, что для матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ обратная $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ (если она существует, а по условию она есть) имеет вид: $\dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Таким образом

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2 \cdot 4 - 3 \cdot (-5)}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{23}\begin{pmatrix} 36 + 35 \\ -27 + 14 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{23}\begin{pmatrix} 71 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71/23 \\ -13/23 \end{pmatrix}$. Откуда

$$x_1 = 71/23, \quad x_2 = -13/23.$$

Решение б). Из предыдущего параграфа следует, что если записать систему линейных уравнений б) с помощью обратной матрицу, то получим $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$. Решаем с помощью обратной матрицы как в п а). Таким образом

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7 \cdot 4 - 3 \cdot (-12)}\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{64}\begin{pmatrix} 63 + 60 \\ -27 + 20 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{64}\begin{pmatrix} 123 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123/64 \\ -7/64 \end{pmatrix}$. Откуда

$$x = 123/64, \quad y = -7/64.$$

2). Решить систему методом Крамера и сравнить ответы с 1).

а). $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 4x - 12y = 9 \\ 3x + 7y = 5 \end{cases}$

По теореме Крамера решение системы линейных уравнений второго порядка вида $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = f \\ cx_1 + dx_2 = g \end{cases}$ имеет вид (если $\Delta \neq 0$) $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где введены определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} f & b \\ g & d \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & f \\ c & g \end{vmatrix}.$$

Решение а). Вычислим определитель коэффициентов: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 15 = 23$. Так он отличен от нуля, то воспользуемся формулами Крамера. Находим

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & -5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 36 + 35 = 71$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 27 = -13$. Следовательно,

$x_1 = 71/23$, $x_2 = -13/23$, что совпадает с решением в 1). а).

Решение б). Вычислим определитель коэффициентов: $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -12 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 28 + 36 = 64$.

Так он отличен от нуля, то воспользуемся формулами Крамера. Находим

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & -12 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 63 + 60 = 123$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 27 = -7$. Следовательно,

$x = 123/64$, $y = -7/64$, что совпадает с решением в 1). б).

Часть II. Методы математического анализа.

Функция одной переменной.

1. Исследование дифференцируемой функции и построение её графика.

а). Построить график функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 100$.

Решение.

1). Найдём производную: $f'(x) = 3x^2 - 12x$.

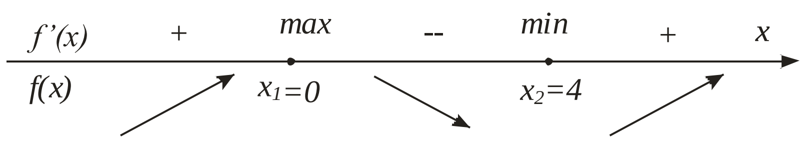
2). Найдём корни производной $f'(x) = 0$.

$3x^2 - 12x = 3x(x - 4) = 0$. Откуда получим два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

3). Используем метод интервалов для нахождения промежутков возрастания и убывания функции, а также определения её максимумов и минимумов:

$$f'(x) = 3x(x - 4)$$

Подставляя в производную значение $x = -1$ (можно взять любое число меньшее первого корня $x_1 = 0$), получим $f'(-1) = 15 > 0$, что указываем как « + » и стрелочкой вверх на графике внизу. Аналогично, подставляя $x = 2$ (можно взять любое число между первым корнем $x_1 = 0$ и вторым $x_2 = 4$), получим $f'(2) = -12 < 0$, что указываем как « – » и стрелочкой вниз также на графике внизу. Наконец, подставляя $x = 5$ (можно взять любое число большее второго корня $x_2 = 4$), получим $f'(5) = 15 > 0$, что указываем как « + » и стрелочкой вверх там же.

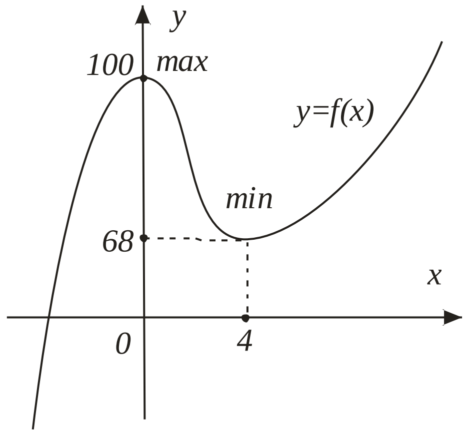


Из вида направления стрелок делаем вывод, что в точке $x_1 = 0$ функция $f(x)$ достигает максимума, в точке $x_2 = 4$ – минимума.

4). Находим значение функции в этих точках:

$$f(0) = 0^3 - 6{\cdot}0^2 + 100 = 100, \qquad f(4) = 4^3 - 6{\cdot}4^2 + 100 = 68.$$

Отмечаем эти точки (0, 100) и (4, 68) на графике и в соответствии со стрелками строим график



б). Построить график производной этой же функции $f(x) = x^3 – 6x^2+100$.

Решение. Ранее найдена производная этой функции: $f'(x) =3x^2-12x$. Строим график по пунктам, аналогично предыдущему заданию.

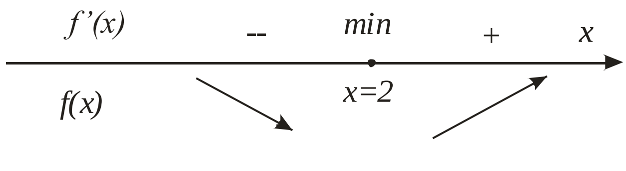
1). Найдём производную: $f''(x) = 6x – 12$, которая является второй производной от исходной функции.

2). Найдём корни второй производной $f''(x) = 0$. Или $6x - 12= 0$. Откуда $x = 2$.

3). Используем метод интервалов для нахождения промежутков возрастания и убывания функции, а также определения её максимумов и минимумов:

$$f''(x) = 6(x – 2)$$

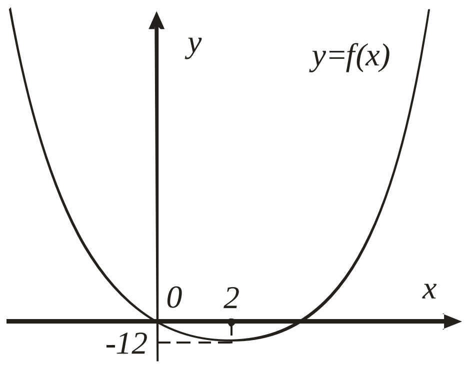
Подставляя в производную значение $x = 0$, получим $f'(0)=–12<0$, что указываем как « – » и стрелочкой вниз на графике внизу. Наконец, подставляя $x = 3$, получим $f''(3) = 6 > 0$, что указываем как « + » и стрелочкой вверх там же.



Из вида направления стрелок делаем вывод, что в точке $x = 2$ функция $f'(x)$ имеет минимум.

4). Находим значение производной в этой точке: $f(2) = 3\cdot 2^2 - 12{\cdot}2 = – 12$.

Отмечаем эту точку (2, –12) на графике и в соответствии с методом интервалов строим график



c). Найти эластичность в точках $x = 5$ и $x = 7$. (Эластичностью дифференцируемой функции называется величина $\varepsilon = \frac{x}{f(x)} f'(x)$).

Решение. По условию $f(x) = x^3 - 6x^2 + 100$. Тогда $f'(x) = 3x^2 - 12x$.

Пусть $x = 5$. Находим: $f(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 100 = 125 - 150 + 100 = 75$ и $f'(5) = 15$. Следовательно,
$\varepsilon(5) = \frac{5}{f(5)} f'(5) = \frac{5}{75} 15 = 1.$

Пусть $x = 7$. Находим: $f(7) = 7^3 - 6 \cdot 7^2 + 100 = 343 - 294 + 100 = 149$ и $f'(7) = 63$. Аналогично,
$\varepsilon(7) = \frac{7}{f(7)} f'(7) = \frac{7}{149} 63 = 3.95$.

Вывод. Вблизи точки экстремума эластичность функции значительно меньше, чем вдали от неё, что объясняется увеличивающейся скоростью роста функции. (Скорость роста функции определяется значением её производной. В точке $x = 7$ значение производной примерно в четыре раза больше, чем точке $x = 5$. При этом значение функции и её аргумент увеличились незначительно.)

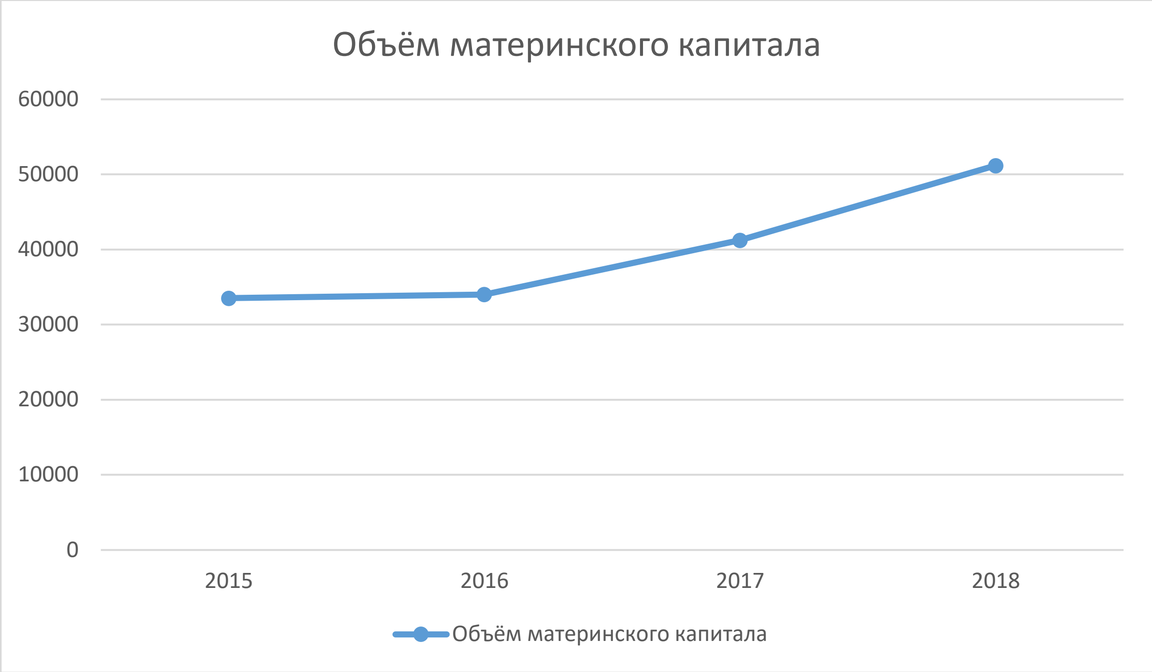
2. **Исследование функции, заданной точечными значениями.**

   Задана таблица по годам, в которой указано число получивших регионального материнского капитала в ленинградской области и число тех, кто воспользовался им на право на покупки земельного участка. В последнем столбце вычислена доля в процентах мат капитала (м к) на покупку земельного участка из получивших м к.

№ Год (n)	объём рег. кап. (V)	приобрет. уч. (K)
2015	33501	10
2016	34001	11
2017	41231	14
2018	51170	23

1). Построить графики V(n) и K(n), и график функции K(V).

Строим график V(n) – объём материнского капитала, в зависимости от времени в годах.



Построим график функции K(n).

Построим график функции K(V).

2). Найти эластичность ε полученного графика во всех точках и записать в таблицу. Для этого составим

а) таблицу изменений функции и её аргумента:

n	x_{n+1}	x_n	$\Delta x_n = x_{n+1}-x_n$	y_{n+1}	y_n	$\Delta y_n = y_{n+1}-y_n$
1	34001	33501	501	11	10	1
2	41231	34001	7230	14	11	3
3	51170	41231	9939	23	14	9

б) таблицу вычисления эластичности ε во всех точках:

n	$\Delta x_n / x_n$	$\Delta y_n / y_n$	ε_n
1	0.015	0.1	6.67
2	0.212	0.27	1.27
3	0.242	0.64	2.66

Эластичность $\varepsilon = \dfrac{\Delta y}{y} \Big/ \dfrac{\Delta x}{x}$ показывает, на сколько процентов изменится величина *y* при изменении величины *x* на один процент.

Вывод: из таблицы видно, что относительный спрос на участки эластичен. (Говорят об эластичности при |ε| > 1 (эластичность может оказаться отрицательной).) Таким образом расходы материнского капитала на приобретение земельных участков жителями Ленинградской области является привлекательным при росте их среднего дохода.

Часть III. Методы математического анализа.

Функция многих переменных.

1. **Нахождение и исследование экстремума дифференцируемой функции двух переменных.**

1). Для функции $F(x,y) = 2x^2+3y^2 - 3xy-5x+8y-1$ найти частные производные функции $F'_x, F'_y, F''_{xx}, F''_{yy}, F''_{xy}$.

2). Найти точки, подозрительные на экстремум, решив систему:

$$\begin{cases} F_x' = 0 \\ F_y' = 0 \end{cases}$$

3). Из частных производных второго порядка составить и вычислить определитель вида:

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix}$$

и сделать вывод о наличии экстремума в точке, подозрительной на экстремум.

2. Исследование на экстремум дифференцируемой функции двух переменных в заданной точке.

4). Для функции $F(x, y) = 4x^4y^6 - 3x^2 + 5y^7$ найти частные производные функции F'_x, F'_y, F''_{xx}, F''_{yy}, F''_{xy}. Из частных производных второго порядка в точке $M(-2, 1)$ составить и вычислить определитель вида:

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix}$$

5). На плоскости XOY изобразить прямую $2x + 3y = 0$ и градиент функции $F(x, y) = 2x + 3y$. Убедиться, что они перпендикулярны. Данная прямая называется *линией уровня*.

Решение.

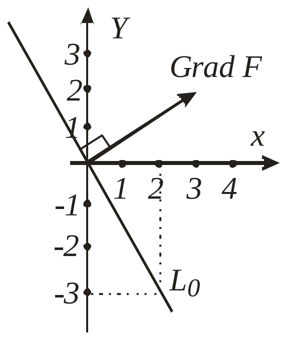
1). Найдём градиент: $F_x'=3$, $F_y'=2$, $grad\ F = 3\vec{i} + 2\vec{j}$

2). Построим график прямой линии l_0: $3x + 2y = 0$ на плоскости XOY по точкам.

Если $x = 0$, то $3{\cdot}x + 2{\cdot}0 = 0$ или $3x = 0$. Следовательно $x = 0$.

Если $x = 2$, то $3{\cdot}2 + 2y = 0$. Следовательно $2y = -6$. Откуда $y = -3$. Строим прямую линию по точкам:

x	*0*	*2*
y	*0*	*-3*



Видно, что угол между прямой $3x + 2y = 0$ и градиентом функции F равен 90^0.

6). Найти градиент функции $F(x, y) = 4x^4y^6 – 3x^2 + 5y^7$ в точке $M(-1, 2)$.

Решение.

$F_x' = 16x^3y^6 - 4x$, $\quad F_x'(-1, 2) = - 16\cdot 2^6 + 4 = -1024 + 4 = -1020$

$F_y' = 24x^4y^5 + 35y^6$, $\quad F_y'(-1, 2) = 24\cdot 2^5 + 35\cdot 2^6 = 768 + 2240 = 3008$

Ответ: $grad\ F = -1020\,\vec{i} + 3008\,\vec{j}$.

Варианты контрольных заданий.

Часть I. Часть I. Методы линейной алгебры.

Системы линейных уравнений и их решения.

1. Матричная форма системы линейных уравнений и её решение.

Записать систему линейных уравнений в матричном виде и указать её матричное решение, в случае единственности решения.

Вариант 1. а). $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -7 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \\ 5x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 8x - 12y + z = 4 \\ 3x + 3y + 6z = 7 \\ 8x + 2y + z = -2 \end{cases}$

Вариант 2. а). $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -7 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 5x - 12y + z = 4 \\ 3x + 4y + 3z = 8 \\ 8x + 9y + z = 6 \end{cases}$

Вариант 3. а). $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = -7 \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 7 \\ 5x_1 - 7x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 9x - 12y + 4z = 4 \\ 6x + 4y + 6z = 8 \\ 8x + 9y + z = 9 \end{cases}$

Вариант 4. а). $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -8 \\ 5x_1 - 7x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 9x - 12y + 5z = -4 \\ 3x + 4y + 6z = -8 \\ 8x + 9y + z = -2 \end{cases}$

Вариант 5. а). $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -7 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 8 \\ 5x_1 - 7x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$ б). $\begin{cases} x - 12y + z = 4 \\ 3x + 4y + 6z = -8 \\ 8x + 9y + z = 2 \end{cases}$

Вариант 6. а). $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -11 \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ 6x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -2 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 9x - 12y + z = 14 \\ 3x + 14y + 6z = 8 \\ 8x + 9y + z = -2 \end{cases}$

Вариант 7. а). $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 10 \\ 4x_1 + x_2 - 12x_3 = 8 \\ 5x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -2 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 9x - y + z = 14 \\ 3x + y + 6z = 8 \\ 8x + 9y + z = 2 \end{cases}$

Вариант 8. а). $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -7 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 8 \\ 5x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 3 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 9x - 12y + z = 14 \\ 7x + 4y + 6z = 8 \\ 8x + 9y + z = 9 \end{cases}$

Вариант 9. а). $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -7 \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ 5x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 9x - 12y + z = 4 \\ 3x + 14y + 6z = 8 \\ 9x + 9y + z = 2 \end{cases}$

Вариант 10. а). $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -7 \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 18 \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = -2 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 9x - 12y + z = 14 \\ 3x - 6y + 6z = 13 \\ 8x + 9y + 11z = -2 \end{cases}$

2. Методы решения системы линейных уравнений.

Решить систему с помощью обратной матрицы и методом Крамера и сравнить ответы.

Вариант №1 а). $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 4x - 12y = 9 \\ 3x + 8y = 5 \end{cases}$

Вариант №2 а). $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 7 \\ 3x_1 + 9x_2 = 7 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 4x - 21y = 9 \\ 3x + 7y = 15 \end{cases}$

Вариант №3 а). $\begin{cases} 12x_1 - 5x_2 = 9 \\ 13x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 4x - 12y = 29 \\ 13x + 7y = 5 \end{cases}$

Вариант №4 а). $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 9 \\ 7x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 4x - 12y = 9 \\ 3x + 8y = 5 \end{cases}$

Вариант №5 а). $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 = 9 \\ 3x_1 + 9x_2 = 8 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 4x - 13y = 9 \\ 3x + 7y = 5 \end{cases}$

Вариант №6 а). $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 6x - 12y = 9 \\ 3x + 7y = 5 \end{cases}$

Вариант №7 а). $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 9 \\ 3x_1 + 7x_2 = 1 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 4x - 7y = 9 \\ 3x + 9y = 5 \end{cases}$

Вариант №8 а). $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 2x - 12y = 9 \\ 3x + 7y = 25 \end{cases}$

Вариант №9 а). $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 9 \\ 6x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 4x - 12y = 6 \\ 13x + 7y = 5 \end{cases}$

Вариант №10 а). $\begin{cases} 12x_1 - 15x_2 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 = 17 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 8x - 2y = 9 \\ 3x + 7y = 6 \end{cases}$

Часть II. Методы математического анализа.

Функция одной переменной.

1. Исследование дифференцируемой функции и построение её графика.

Построить график функции её производной и найти эластичность в двух заданных точках.

Вариант №1 $f(x) = 2x^3 - 5x^2+14.$ Вариант №2 $f(x) = x^3 +6x^2+12.$

Вариант №3 $f(x) = 6x^3 - x^2+10.$ Вариант №4 $f(x) = x^3 + 5x^2+30.$

Вариант №5 $f(x) = 2x^3 - 8x^2+6.$ Вариант №6 $f(x) = x^3 + 4x^2+40.$

Вариант №7 $f(x) = x^3 - 4x^2+15.$ Вариант №8 $f(x) = x^3 + 6x^2+50.$

Вариант №9 $f(x) = x^3 - x^2+18.$ Вариант №10 $f(x) = x^3 + 8x^2+60.$

2. Исследование функции, заданной точечными значениями.

1. Самостоятельно выбрать таблицу двух величин в различные периоды времени из публичных статистических данных. Построить графики и найти эластичность как в образце. (Числа во всех вариантах должны быть разные. Достаточно четырёх периодов.)

№ периода (n)		

2. Сделать вывод об эластичности функции.

Часть III. Методы математического анализа.

Функция многих переменных.

Вариант №1.

1. Исследовать функцию на экстремум $F(x,y) = 4x^2+y^2 - 3xy-5x+8y-1$

2. Для функции $F(x, y) = 5x^4y^6 - 9x^2 + 5y^7$ в точке М(2, 3) найти определитель

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix}.$$

3. На плоскости XOY изобразить прямую $f(x, y) = 0$ и градиент $f(x, y)$,

если $f(x, y) = 6x - 7y$. Убедиться, что они перпендикулярны.

Вариант №2.

1. Исследовать функцию на экстремум $F(x,y) = x^2+3y^2 - xy-5x+8y-1$

2. Для функции $F(x, y) = 4x^6y^6 - 3x^2 + 8y^7$ в точке M(2, 3) найти определитель

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix}.$$

3. На плоскости XOY изобразить прямую $f(x, y) = 0$ и градиент $f(x, y)$, если $f(x, y) = 7x - 5y$. Убедиться, что они перпендикулярны.

Вариант №3.

1. Исследовать функцию на экстремум $F(x,y) = x^2+y^2 - 3xy-5x+8y-1$

2. Для функции $F(x, y) = 4x^4y^7 - 3x^2 + 5y^7$ в точке M(2, 3) найти определитель

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix}.$$

3. На плоскости XOY изобразить прямую $f(x, y) = 0$ и градиент $f(x, y)$, если $f(x, y) = 5x + 9y$. Убедиться, что они перпендикулярны.

Вариант №4.

1. Исследовать функцию на экстремум $F(x,y) = x^2+6y^2 - xy-5x+8y-1$

2. Для функции $F(x, y) = 14x^5y^8 - 3x^2 + 5y^7$ в точке M(2, 3) найти определитель

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix}.$$

3. На плоскости XOY изобразить прямую $f(x, y) = 0$ и градиент $f(x, y)$, если $f(x, y) = 9x - 7y$. Убедиться, что они перпендикулярны.

Вариант №5.

1. Исследовать функцию на экстремум $F(x,y) = 3x^2+3y^2 - xy-5x+8y-1$

2. Для функции $F(x, y) = 4x^7y^6 - 3x^2 + 5y^7$ в точке M(2, 3) найти определитель

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix}.$$

3. На плоскости XOY изобразить прямую $f(x, y) = 0$ и градиент $f(x, y)$, если $f(x, y) = 8x - 3y$. Убедиться, что они перпендикулярны.

Вариант №6.

1. Исследовать функцию на экстремум $F(x,y) = x^2+8y^2 - 4xy-5x+8y-1$

2. Для функции $F(x, y) = 4x^9y^6 - 3x^3 + 5y^7$ в точке M(2, 3) найти определитель

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix}.$$

3. На плоскости XOY изобразить прямую $f(x, y) = 0$ и градиент $f(x, y)$, если $f(x, y) = 7x + 4y$. Убедиться, что они перпендикулярны.

Вариант №7.

1. Исследовать функцию на экстремум $F(x,y) = 2x^2+7y^2 - 4xy-5x+8y-1$

2. Для функции $F(x, y) = 4x^4y^6 - 3x^2 + 5y^7$ в точке M(2, 3) найти определитель

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix}.$$

3. На плоскости XOY изобразить прямую $f(x, y) = 0$ и градиент $f(x, y)$, если $f(x, y) = 5x - 3y$. Убедиться, что они перпендикулярны.

Вариант №8.

1. Исследовать функцию на экстремум $F(x,y) = x^2+3y^2 -xy-5x+8y-1$

2. Для функции $F(x, y) = 4x^4y^6 - 3x^2 + 5y^7$ в точке M(2, 3) найти определитель

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix}.$$

3. На плоскости XOY изобразить прямую $f(x, y) = 0$ и градиент $f(x, y)$, если $f(x, y) = 5x - 7y$. Убедиться, что они перпендикулярны.

Вариант №9.

1. Исследовать функцию на экстремум $F(x,y) = x^2+6y^2 - 4xy-5x+8y-1$

2. Для функции $F(x, y) = 4x^5y^5 - 3x^2 + 5y^7$ в точке M(2, 3) найти определитель

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix}.$$

3. На плоскости XOY изобразить прямую $f(x, y) = 0$ и градиент $f(x, y)$, если $f(x, y) = 9x - 4y$. Убедиться, что они перпендикулярны.

Вариант №10.

1. Исследовать функцию на экстремум $F(x,y) = 3x^2+5y^2 - 2xy-5x+8y-1$

2. Для функции $F(x, y) = 4x^8y^6 - 3x^6 + 5y^7$ в точке M(2, 3) найти определитель

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix}.$$

3. На плоскости XOY изобразить прямую $f(x, y) = 0$ и градиент $f(x, y)$, если $f(x, y) = 8x + 4y$. Убедиться, что они перпендикулярны.

Обязательные требования к самостоятельной работе.

1. Титульный лист.

2. Запись текста условия.

3. Решение должно содержать графики и таблицы как в образце.

4. Решение должно содержать численные расчёты как в образце.

5. Числовые данные II части 2 пункта необходимо взять из источника, соответствующего профессиональному интересу, на который обязательно необходимо сослаться. Необходим вывод.

5. В заключении каждой из частей необходим полный ответ (как в образце).