1 Основные задачи линейного программирования

Линейное программирование – это наука о методах исследования и отыскания наибольшего и наименьшего значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения. Таким образом, задачи линейного программирования относятся к задачам на условный экстремум функции. Выделяют две основные задачи линейного программирования.

Задача 1. Определение оптимального ассортимента продукции.

Предприятие может производить два вида изделий P_1 и P_2, располагая для их изготовления ограниченными ресурсами материалов Q_1, Q_2 в количествах 420 и 200 единиц, и оборудования Q_3 в количестве 360 единиц. Затраты ресурсов и оборудования на изготовление одного изделия P_1 и P_2 равны 2 и 3, 2 и 1, 4 и 1 соответственно. Известно, что прибыль, которую получает предприятие от выпуска одного первого изделия равна 40 единицам, а от одного второго изделия равна 50 единицам. Требуется определить, сколько изделий P_1 и P_2 должно производить предприятие, чтобы достичь наибольшей прибыли. Для решения задачи прежде всего нужно составить ее математическую модель, то есть выразить все условия задачи в математической форме. Для этого запишем условие задачи в виде таблицы.

вид ресурсов	затраты на ед. прод.		объём ресурсов
	P_1	P_2	
Q_1	2	3	420
Q_2	2	1	200
Q_3	4	1	360
прибыль	40	50	

Введём искомые неизвестные x_1 и x_2, обозначающие число изделий P_1 и P_2, которые должно производить предприятие. Неизвестные x_1 и x_2 должны удовлетворять условиям того, что расход ресурса не может превышать его количества, которым располагает предприятие, кроме того, из определения x_1 и x_2 ясно, что они могут принимать лишь неотрицательные значения:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 420 \\ 2x_1 + x_2 \leq 200 \\ 4x_1 + x_2 \leq 360 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Система неравенств (1) выражают все условия, налагаемые на x_1 и x_2. Любая пара значений x_1 и x_2, удовлетворяющая системе неравенств (1), будет определять один из допустимых вариантов плана предприятия по выпуску данных изделий. Таких допустимых вариантов будет бесчисленное множество. Даже если учесть условие целочисленности значений x_1 и x_2, то и в этом случае различных допустимых вариантов плана будет хотя и не бесконечное множество, но достаточно большое число. Согласно условию задачи, необходимо выбрать такой вариант плана, для которого суммарная прибыль, получаемая предприятием, окажется наибольшей. Этот вариант плана назовём оптимальным. Прибыль предприятия, которую мы обозначим через z, будет определяться из следующего равенства:

$$z = 40x_1 + 50x_2 \to \max . \tag{2}$$

Функция z называется целевой функцией (функцией цели).

Теперь можно сформулировать задачу математически, то есть описать её в виде математической модели.

Среди множества решений системы неравенств (1) найти такое решение (такую пару значений x_1 и x_2), для которого целевая функция z в (1.2) достигнет наибольшего значения.

Математическая модель задачи, заданная выражениями (1 – 1.2), получила название линейной модели, так как во все выражения неизвестные x_1 и x_2 входят только в первой степени. По этой причине подобные задачи называются задачами линейного программирования. Решив задачу (1 – 1.2) методами, о которых будет идти речь в дальнейшем, найдём оптимальный план: $x_1 = 45$ и $x_2 = 110$. При этом предприятие получит наибольшую прибыль: $z = 7300$.

Задача 2. Нахождение оптимальной диеты.

Для кормления животных необходимо составить дневной рацион (диету), пользуясь набором из трёх видов кормов. Требуется, чтобы этот дневной рацион содержал необходимое количество белка (не менее 2000 г), углеводов (не менее 20 г) и кальция (не менее 100 г) и при этом оказался бы наиболее выгодным по себестоимости. Следующая таблица характеризует содержание белка, углеводов и кальция в одной единице каждого вида корма и себестоимость кормов:

компоненты	исп.	виды	кормов	мин. содерж.
ресурсов	сено	силос	конценр.	компонент
белки	0.5	0.2	1.0	20
углеводы	40	10	200	2000
кальций	5	4	3	100
цена	2	1	4	

Для составления математической модели обозначим различные виды кормов, составляющие искомый рацион, через x_1, x_2, x_3. Тогда, на основании условий задачи и того, что переменные x_1, x_2, x_3 должны быть неотрицательными, они должны удовлетворять следующим ограничительным условиям:

$$\begin{cases} 0.5x_1 + 0.2x_2 + 1.0x_3 \geq 20 \\ 40x_1 + 10x_2 + 200x_3 \geq 2000 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \qquad \geq 100 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Очевидно, существует бесчисленное множество решений системы неравенств (1.3), а это значит, что существует бесчисленное множество допустимых по условиям задачи рационов кормления. Среди них нужно выбрать рацион, обладающий наименьшей себестоимостью. Обозначив через z суммарную себестоимость дневного рациона, получим

$$z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 \to \min . \tag{4}$$

Теперь можно сформулировать задачу следующим образом:

найти совокупность значений x_1, x_2 и x_3, удовлетворяющих неравенствам (1.3), для которых функция z из (1.4) достигала бы наименьшего значения.

Таким образом, опять получена линейная математическая модель, заданная выражениями (1.3 – 1.4).

2 Графический метод

Из рассмотренных ранее задач, задача о диете содержит три переменных, поэтому её нельзя решить графическим методом, а задача определения оптимального ассортимента продукции – две, поэтому будем её решать графическим методом.

Запишем ещё раз её математическую формулировку.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 420 \\ 2x_1 + x_2 \le 200 \\ 4x_1 + x_2 \le 360 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$z = 40x_1 + 50x_2 \to \max, \tag{6}$$

где x_1 – количество изделий P_1, x_2 – количество изделий P_1, а прибыль предприятия – через z.

Найдём область решение неравенства. Вначале рассмотрим первое неравенство системы (1.5):

$$2x_1 + 3x_2 \le 420. \tag{7}$$

Границу области решений этого неравенства находят заменой неравенства на равенство:

$$2x_1 + 3x_2 = 420. \tag{8}$$

Множество значений (x_1, x_2), удовлетворяющих уравнению (1.8), соответствует прямой, которую обозначим как l_1. Изобразим эту прямую, проведя её через две точки. Точки получим, подставляя в (1.8) нулевые значения одной координаты и по ним находя значения другой координаты:

$$\begin{array}{llll} \text{если} \quad x_1 = 0, & \text{то} \quad x_2 = 420/3 = 140, & A(0, 140), \\ \text{если} \quad x_2 = 0, & \text{то} \quad x_1 = 420/2 = 210, & E(210, 0). \end{array}$$

Через точки A и E проведём прямую l_1 (рис. 1).

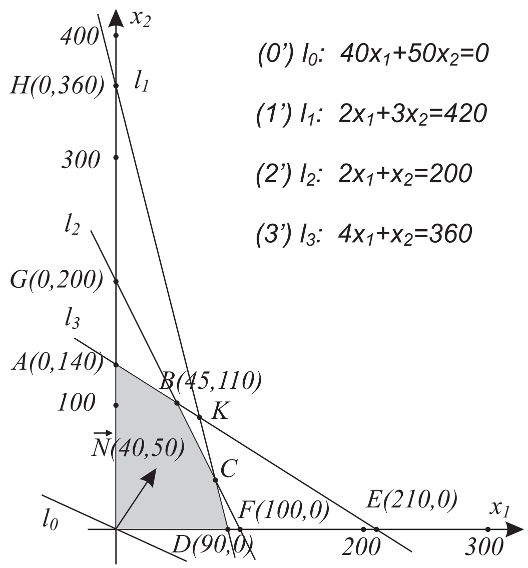

рис. 1.

Известно, что решением неравенства (1.7) является полуплоскость, ограниченная прямой l_1. Чтобы найти, какая из двух полуплоскостей, на которые делит плоскость X_1OX_2, является решением (1.7) прямая l_1, достаточно подставить координаты какой-либо из точек полуплоскостей в неравенство (1.7) и посмотреть, выполняется ли оно в выбранной точке.

Если выполняется, то решением неравенства является полуплоскость, содержащая эту точку, в противном случае – другая полуплоскость. В качестве «тестовой точки» обычно берут начало координат – O(0,0). В нашем случае будет $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 \leq 150$ – верно. Следовательно, решением неравенства (1.7) является полуплоскость, содержащая точку O(0,0) и ограниченная прямой l_1.

Аналогично решаем оставшиеся 4 неравенства системы (1.5), обозначая прямые, соответствующие второму и третьему из неравенств (1.5), как l_2 и l_3 соответственно. В результате получим область, заштрихованную на рисунке 1.

Перейдём к поиску оптимального решения, которое соответствует максимуму целевой функции (1.6). Из теории известно, если величину $Ax + By + C$ обозначить через новую переменную $z = Ax + By + C$, то её значение увеличивается в направлении вектора $N = (A, B)$, который называется градиентом функции $z = z(x, y)$.

Найдём градиент функции z, указанной в задаче.

$$\text{grad } z = 40\vec{i}_1 + 50\vec{i}_2,$$

где $\vec{i}_1, \vec{i}_2$ – орты на плоскости X_1OX_2.

Из теории известно, что градиент показывает направление наибольшего роста функции. Так как в задаче линейного программирования целевая функция $z(x_1, x_2)$ имеет линейный вид, то градиент оказался не зависящим от точки. Следовательно, перемещение из любой точки плоскости в направлении градиента приведёт к увеличению значения целевой функции, а в направлении, перпендикулярном градиенту, – значение целевой функции не изменится.

На плоскости X_1OX_2, через точку O(0,0) проведём прямую l_0, перпендикулярно вектору $\vec{N}$. Для всех точек этой прямой значение целевой функции будет постоянно, так как перемещение по ней равносильно движению, перпендикулярному градиенту. Такая прямая, вдоль которой значение целевой функции не изменяется называется *линией уровня.*

Перемещая линию уровня в направлении вектора $\vec{N}$ параллельно самой себе, находим крайнюю точку области, которую обозначим как B – в этой точке целевая функция достигает наибольшего значения.

Из рис. 1 видим, что эта точка является точкой пересечения прямых l_1 и l_2. Найдём координаты этой точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 420 \\ 2x + x_2 = 200 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_2 = 210 \\ 4x_1 = 180 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 45 \\ x_2 = 110. \end{cases}$$

При данных значениях x_1 и x_2 находим $z = 7300$.

Ответ: при изготовлении изделий P_1 в количестве 45 единиц, а изделий P_2 – 110 единиц фирма получит наибольшую прибыль в размере 7300 единиц.

Замечание 1. Из метода решения следует, что наибольшее значение целевой функции задачи линейного программирования всегда достигается на границе области, в её угловой точке. В связи с этим справедлив альтернативный подход, основанный на методе перебора значения целевой функции в угловых точках. Так, в нашем случае:

$$z(O) = 0, \quad z(A) = 7000, \quad z(B) = 7300, \quad z(C) = 5600.$$

Этот способ решения удобно сочетать с изложенным выше, когда имеются сомнения в точности нахождения оптимальной точки, связанные с близким к параллельному расположению линии уровня и линии границы области.

Замечание 2. В том случае, когда требуется минимизировать значение целевой функции, достаточно линию уровня двигать в направлении, противоположном градиенту целевой функции, сохраняя все остальные рассуждения прежними.

Замечание 3. Могло бы оказаться, что линия уровня совпадёт с одной из граничных линий области. В этом случае решением задачи будет вся часть границы, являющейся пересечением линии уровня и границы области.