В. Ю. Дорофеев

Пособие по математике

для поступающих в СПбГУЭФ

издательство
санкт-петербургского государственного университета
экономики и финансов

2005

ББК 22.1я72
УДК 510
Д694

Дорофеев В. Ю. Пособие по математике для поступающих в СПбГУЭФ. – СПб: Изд-во СПбГУЭФ, 2005. – 160 с.

Настоящее пособие предназначено для самостоятельной подготовки к экзамену по математике в СПбГУЭФ и создано на основе экзаменационных билетов за 1990 – 1996 годы и тестов 1997 – 2005 годов.

Пособие содержит 8 тематических глав. По каждой теме проводится анализ типовых примеров. В конце тем предложены задачи для самостоятельной работы.

В последней главе дано несколько вариантов экзаменационных тестов по математике, близких к тестам 1999 – 2005 годов в СПбГУЭФ и несколько вариантов олимпиадных заданий за 2003 – 2005 годы, а также несколько дополнительных заданий.

Автор выражает благодарность Дмитриеву В. Г. за помощь при работе над книгой и всем тем, кто помог при сверке ответов к задачам.

ISBN 5 – 7310 – 1720 – 4

Глава 1

Алгебраические уравнения и неравенства.

1.1 Формулы сокращённого умножения.

1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
2. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
3. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
4. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
5. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
6. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
7. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
8. $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

Для доказательства первой формулы достаточно показать, что правая часть выражения равна левой:

1. $(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$.

Для доказательства четвёртой формулы покажем, что из левой части следует правая:

4. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Доказательство остальных формул предлагается провести читателю самостоятельно.

1.2 Рациональные уравнения и неравенства.

Выражение вида

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0 \tag{1.1}$$

называется *многочленом степени* n или просто *многочленом*. Отдельные слагаемые многочлена вида $a_k x^k$ – *одночленами*, где x – *переменная*, а числа a_k – *коэффициенты*.

Многочлены можно складывать, умножать и делить. Рассмотрим операцию деления многочленов в столбик, которая практически такая же как и деление чисел. Например, разделим $P_2(x) = 4x^2 - 13x + 15$ на $Q_1(x) = x - 4$:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 4x^2 - 13x + 15 \\ \underline{4x^2 - 16x} \end{array} & \begin{array}{l} x - 4 \\ \hline 4x + 3 \end{array} \\ -\begin{array}{r} 3x + 15 \\ \underline{3x - 12} \end{array} & \\ 27 & \end{array}$$

Обозначая частное как $G_1(x) = 4x+3$ и остаток как $R = 27$, получим: $P_2(x) = G_1(x) \cdot Q_1(x) + R$.

Корнем многочлена $P_n(x)$ называется число x^*, что $P_n(x^*) = 0$.[1]. Многочлен (1.1) при $n = 2$ называется *квадратным*. Найдём корни *квадратного уравнения* $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$.

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}\right] = \tag{1.2}$$

$$= a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \stackrel{*}{=}$$

Выражение $b^2 - 4ac = D$ называется *дискриминантом* и определяет количество корней квадратного уравнения: если $D < 0$, то выражение в квадратных скобках (1.2) представляет собой сумму неотрицательного и положительного чисел, поэтому всегда положительно, следовательно квадратное уравнение не имеет корней; если $D = 0$, то из (1.2) видно, что имеется только один корень $x_0 = -b/2a$; наконец при $D > 0, D = (\sqrt{D})^2$ выражение (1.2) представимо в виде разности квадратов:

$$\stackrel{*}{=} a(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}})(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}). \tag{1.3}$$

[1]Если коэффициент a_n многочлена $P_n(x)$ равен единице, то уравнение $P_n(x) = 0$ называется *приведённым*.

Откуда находим два различных корня ($D > 0$) квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \tag{1.4}$$

удовлетворяющие свойствам:

$$\text{при } a \neq 0, \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \tag{1.5}$$

Равенства (1.5) называются *теоремой Виета.*

Пример 1. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2-7x+1 = 0$. Найти $(2x_1 + x_2)^{-1} + (x_1 + 2x_2)^{-1}$ и $x_1^2 + x_2^2$.

Решение. Так как $D = 49-4 > 0$, то имеется два различных корня и по теореме Виета $x_1 + x_2 = 7, x_1 \cdot x_2 = 1$. Но $2x_1 + x_2 = (x_1 + x_2) + x_1 = 7 + x_1$ и $x_1 + 2x_2 = 7 + x_2$. Таким образом

$$\frac{1}{2x_1 + x_2} + \frac{1}{x_1 + 2x_2} = \frac{1}{7 + x_1} + \frac{1}{7 + x_2} = \frac{7 + x_1 + 7 + x_2}{(7 + x_1)(7 + x_2)} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}.$$

Найдём сумму квадратов корней, прибавляя и отнимая $2x_1x_2$:

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 49 - 2 = 47.$$

Ответ: $7/33$ и 47.

Пример 2. Найти наименьшее значение функции:

$$f(x) = \frac{6x^4 + x^3 - 5x^2 + 42x - 24}{2x^2 - 3x + 6}.$$

Решение. Выполним операцию деления (вдруг что-то упростится?)

$$\begin{array}{r|l}
-\;6x^4 + x^3 - 5x^2 + 42x - 24 & 2x^2 - 3x + 6 \\ \cline{2-2}
\underline{6x^4 - 9x^3 + 18x^2} \qquad\qquad\quad & 3x^2 + 5x - 4 \\
-\;10x^3 - 23x^2 + 42x \qquad\; & \\
\underline{10x^3 - 15x^2 + 30x} \qquad\; & \\
-\;-8x^2 + 12x - 24 & \\
\underline{-8x^2 + 12x - 24} & \\
0 &
\end{array}$$

Следовательно $f(x) = 3x^2+5x-4$. График этой функции – парабола, ветвями вверх, наименьшее значение которой находится в её вершине, то есть в точке $x_0 = -5/6$. Но $f(-5/6) = 3(-5/6)^2 + 5 \cdot (-5/6) - 4 = -73/12$. Ответ: $-73/12$.

Пример 3. Пусть уравнение $f(x)=0$, при $f(x)=3x^2-5x-7$ имеет корни x_1, x_2. Найти $f(x_1+1)+f(x_2+1)$.

Решение. $f(x_1+1)=3(x_1+1)^2-5(x_1+1)-7=3(x_1^2+2x_1+1)-5(x_1+1)-7=6x_1-2$, так как $3x_1^2-5x_1-7=0$. Ввиду симметрии между x_1 и x_2: $f(x_2+1)=6x_2-2$. Тогда $f(x_1+1)+f(x_2+1)=6x_1-2+6x_2-2=6(x_1+x_2)-4=6\cdot 5/3-4=6$. Ответ: 6.

По *основной теореме алгебры* уравнение $P_n(x)=0$ может иметь не более чем n действительных корней, при этом, если найдено ровно n корней, то многочлен (1.1) может быть представлен в виде произведения двучленов:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n), \quad (1.6)$$

где $a_n \neq 0$. Если корней меньше n, то в (1.6) вместо $(x-x_i)(x-x_k)$ будут входить трёхчлены вида x^2+bx+c, для которых $b^2-4ac<0(a=1)$.

Корень x_k называется *чётным*, если в разложение (1.6) он входит в чётной степени (то есть $x_{i_1}=\ldots=x_{i_{2n}}=x_k$), и *нечётным*, если – в нечётной степени (то есть $x_{i_1}=\ldots=x_{i_{2n+1}}=x_k$).

Перемножим правую часть в (1.6) и сравним коэффициенты при равных степенях x^k $(k=0,1,\ldots,n-1)$. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -a_n(x_1+\ldots+x_n)=a_{n-1} \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_n(-x_1)\cdot\ldots\cdot(-x_n)=a_0. \end{cases}$$

Из последнего равенства системы получим:

Следствие 1. Если корни уравнения $P_n(x)=0$ с целыми коэффициентами целочисленные, то они являются делителями свободного члена a_0.

Пример 4. Решить уравнение: $x^3-3x^2+5x-6=0$.

Решение. Выпишем делители $a_0=-6$: $\pm1; \pm2; \pm3; \pm6$ и проверим, не являются ли они корнями?

$x=+1: \quad 1^4-1^3+5\cdot1-6=-1\neq0,$

$x=-1: \quad (-1)^4-(-1)^3+5\cdot(-1)-6=-9\neq0,$

$x=+2: \quad 2^4-2^3+5\cdot2-6=0.$

Итак, число 2 – корень. Для нахождения других корней воспользуемся вторым следствием основной теоремы, которое вполне очевидно из разложения (1.6).

Следствие 2. Если x^* – корень уравнения $P_n(x)=0$, то многочлен $P_n(x)$ делится на $x-x^*$ без остатка.

В данном случае $\dfrac{x^3-3x^2+5x-6}{x-2} = x^2-x+3$. Так как дискриминант полученного квадратного трёхчлена меньше нуля ($D=-11$), то заданное уравнение имеет только один корень $x=2$. Ответ: 2.

Уравнения четвёртой степени вида $Ax^4+Bx^3+Cx^2 \pm Bx+A=0$ называется *возвратным*. Разделим его на x^2 (это можно сделать, так как $A \neq 0$, поэтому $x=0$ – не корень) и сгруппируем члены с одинаковыми коэффициентами: $A(x^2+1/x^2)+B(x \pm 1/x)+C=0$.

Пусть $u = x \pm 1/x$, тогда $u^2 = x^2+1/x^2 \pm 2$ и приходим к квадратному уравнению: $A(u^2 \mp 2)+Bu+C=0$, которое решаем по изложенной ранее схеме.

Пример 5. Решить уравнение: $-6x^2-4x+3x^4+4x^3+3=0$.

Решение. Запишем многочлен в канонической форме (то есть в порядке убывания степеней): $3x^4+4x^3-6x^2-4x+3=0$.

Это уравнение возвратное. Разделим его на x^2, сгруппируем и сделаем замену: $v = x-\dfrac{1}{x}$: $3(x^2+\dfrac{1}{x^2})-6+4(x-\dfrac{1}{x}) = 3(v^2+2)+4v-6=0, v_1=0$, $v_2=-4/3$. Если $v_1 = x-1/x=0$, то $x_{1,2}=\pm 1$. Если $v_2 = x-1/x=-4/3$, то $x_{3,4} = (-2 \pm \sqrt{13})/3$.

Ответ: $x = \{\pm 1; \dfrac{-2 \pm \sqrt{13}}{3}\}$.

Замечание 1. Имеется *формула корней квадратного трехчлёна с чётным коэффициентом при линейном члене*: если $a \neq 0$ и

$$ax^2+2px+c=0, \text{ то } x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2-ac}}{a}. \tag{1.7}$$

Замечание 2. Если ответ состоит из нескольких корней, то его записывают в фигурных скобках, отделяя каждый корень точкой с запятой как элемент перечисления.

Пример 6. Разложить на множители[2]: x^4+x^2+1.

Решение. Выделим разность квадратов, прибавляя и отнимая x^2:

$$x^4+x^2+1 = (x^2)^2+2x^2+1-x^2 = (x^2+1+x)(x^2+1-x).$$

Пример 7. Разложить на множители: x^4+3x^2-2x+3.

Решение. Иногда, при решении задач можно использовать не до конца обоснованную догадку. В этом случае обычно достаточно доказать,

[2]В подобных задачах предполагается разложение на многочлены с неотрицательными степенями.

что найденное решение единственно. Так, разложение (1.6) подсказывает, что могут существовать числа A и B, что справедливо разложение:

$$x^4 + 3x^2 - 2x + 3 = (x^2 + Ax + 3)(x^2 + Bx + 1) =$$

$$x^4 + (A + B)x^3 + (4 + AB)x^2 + (A + 3B)x + 3.$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях, получим $A = 1$ и $B = -1$.Так как дискриминант обоих квадратных трёхчленов отрицателен, то дальнейшее разложение невозможно. Ответ: $(x^2 + x + 3)(x^2 - x + 1)$.

Пример 8. Определить, при каких a и b многочлен $ax^3+bx^2-73x+102$ делится на $x^2 - 5x + 6$ без остатка.

Решение. Пусть $P_3(x) = ax^3 + bx^2 - 73x + 102$ и $Q_2(x) = x^2 - 5x + 6$. Так как по условию многочлен $P_3(x)$ делится на многочлен $Q_2(x)$ без остатка, то $P_3(x)/Q_2(x) = px+q$ с некоторыми числами p и q (что следует из сравнения степеней). Откуда $P_3(x) = (px + q)Q_2(x)$. Из сравнения коэффициентов при степенях x^3 и $x^0 = 1$ видим, что $p = a$ и так как $6q = 102$, то $q = 17$. Найдём $(ax + 17)Q_2(x)$ и приравняем $P_3(x)$:

$$ax^3 + bx^2 - 73x + 102 = ax^3 - 5ax^2 + 6ax + 17x^2 - 85x + 102.$$

Сравним коэффициенты при степенях x^2 и x: $\begin{cases} 6a - 85 = -73 \\ 17 - 5a = b \end{cases}$. Откуда $\begin{cases} a = 2 \\ b = 7 \end{cases}$. Ответ: $a = 2, b = 7$.

Неравенства, представимые в виде $ax + b < 0$ или $ax + b \leqslant 0$, при $a \neq 0$, называются *линейными неравенствами*.

Пример 9. Решить неравенство: $6x - 8 \geqslant 3x + 4$.

Перенесём в левую часть все переменные величины, а в правую часть все постоянные: $6x - 3x \geqslant 4 + 8$ или $3x \geqslant 12$.

Откуда $x \geqslant 4$ или на числовой оси

Ответ может быть записан либо в виде неравенства $x \geqslant 4$, либо в форме явного указания множества $[4; +\infty)$. Оба способа записи считаются одинаково допустимыми.

Неравенства, представимые в виде $P_n(x)/Q_m(x) < 0$ (или $\leqslant 0$), где $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены и $Q_m(x) \neq 0$, называются *рациональными неравенствами*. Такие неравенства решаются *методом интервалов*, состоящим из следующих шагов:

1) нахождение корней многочленов $P_n(x) = 0$ и $Q_m(x) = 0$;

2) найденные корни отмечаются на числовой оси, при этом над чётными корнями ставится стрелка;

3) корни отмечаются либо закрашенными кружочками, что означает их вхождение в решение, либо пустыми – тогда этот корень в решение не входит;

4) дугой выделяются области между нечётными корнями, при этом стрелки обходятся (рис. 4);

5) в неравенство подставляется значение x из крайней правой области и находится знак левой части, который указывается на рисунке;

6) далее в областях знаки чередуются.

Выделение чётных корней связано с тем, что вблизи их, но вдали от всех других корней рациональное выражение имеет один и тот же знак, а для нечётного корня знаки слева и справа от корня различны. Например, если $P_2(x) = (x-1)^2$, то $x = 1$ – чётный корень, при этом как для $x > 1$, так и для $x < 1, P_2(x) = (x-1)^2 > 0$, но в случае $P_3(x) = (x-5)^3$ число $x = 5$ – нечётный корень, при этом для $x < 5, P_3(x) = (x-5)^3 < 0$, а для $x > 5, P_3(x) = (x-5)^3 > 0$.

Пример 10. Решить неравенство: $x^2 - 5 \leqslant 3x - 1$.

Решение. Будем искать решения этого неравенства и всех остальных, если это не оговорено особо, методом интервалов.

Перенесём всё выражение в левую часть, найдём корни и разложим его на линейные сомножители: $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4) \leqslant 0$.

рис. 1.

Отметим на числовой оси точки, в которых линейные сомножители обращаются в ноль, после чего расставим знаки во всех полученных интервалах по *принципу чередования знаков: если корень чётный, то справа и слева от него одинаковые знаки, если корень нечётный, то – справа и слева от него знаки различны.* Для этого находим знак всего выражения в точке $x = 5$: $+ \cdot + = +$. Ответ: $[-1; 4]$.

Пример 11. Решить неравенство: $\dfrac{(x-5)(1-x)}{x-3} \geqslant 0$.

Решение. При $x = 6 : \dfrac{+ \cdot -}{+} = -$. Из рис. 2 получим ответ: $(-\infty; 1] \cup (3; 5]$.

рис. 2.

Пример 12. Решить неравенство: $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2x+1}{x+1} > 1$.

Решение. Перенесём единицу влево и приведём выражение к общему знаменателю:

$$\frac{x}{x-1}-\frac{2x+1}{x+1}-1=\frac{-2(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2})(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2})}{(x-1)(x+1)}>0.$$

Иногда возникает трудность с расположением на числовой оси иррациональных чисел. Чаще всего появляются: $\sqrt{3}\simeq 1.7$, $\sqrt{5}\simeq 2.4$, $\sqrt{6}\simeq 2.45$. Таким образом $(1-\sqrt{5})/2\simeq(1-2.4)/2=-0.7$; $(1+\sqrt{5})/2\simeq 1.7$.

При $x=2$: $\dfrac{-++}{++}=-$. Из рис. 3 получим ответ: $x\in(-1;\frac{1-\sqrt{5}}{2})\cup(1;\frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

рис. 3.

Пример 13. Решить неравенство: $\dfrac{(x-1)^2(3-x)}{x+2}\leqslant 0$.

Решение. На числовой оси отмечаем корни $\{-2;1;3\}$ и так как корень $x=1$ – чётный, то его выделяем стрелкой. Определяем знак при $x=4$: $\dfrac{+\cdot-}{+}=-$ и расставляем знаки по принципу чередования. Из рис. 4 приходим к ответу: $(-\infty;-2)\cup\{1\}\cup[3;+\infty)$.

рис. 4.

Пример 14. Решить неравенство. $\dfrac{(2x+8)^2(x^2-3x+7)(4-x)}{(x+6)(x-x^2-1)(x-1)^2}\geqslant 0$.

Решение. Находим $D(P_2)$ – дискриминант квадратного трёхчлена $P_2(x)=x^2-3x+7$. Так как $D(P_2)=-19$ и $P_2(0)=12>0$, то $P_2(x)>0$ при всех x. Аналогично для $Q_2(x)=x-x^2-1$ получим $D(Q_2)=-3<0$ и $Q_2(0)=-1<0$, поэтому $Q_2(x)<0$ при всех x.

На числовой оси отмечаем корни $\{-6;-4;1;4\}$, при этом $x=-4$ и $x=1$ – чётные корни, которые выделяем стрелкой. Определяем знак:

при $x=5:\ \dfrac{+\cdot+\cdot-}{+\cdot-\cdot+}=+$. Расставляем знаки по принципу чередования. Ответ: $(-\infty;-6)\cup\{-4\}\cup[4;+\infty)$ (рис. 5).

рис. 5.

В случае системы неравенств решение состоит из двух шагов:

1. Каждое неравенство системы решаем методом интервалов.

2. Через каждый корень проводим вертикальные прямые и находим область совместных решений.

Пример 15. Решить систему неравенств: $\begin{cases}\dfrac{(-x+3)^3(x+3)}{x^2}>0\\ \dfrac{(1-x)^2}{(x+2)(2x-5)^3}\geqslant 0.\end{cases}$

Решение. На числовых осях (рис. 6) отмечаем корни $\{-3; 0; 3\}$, где $x = 0$ – чётный (на верхней) и $\{-2; 1; 2.5\}$, $x = 1$ – также чётный (на нижней). Определяем знаки при $x = 4$: $\dfrac{- \cdot +}{+} = -$ (на верхней оси) и при $x = 3$: $\dfrac{+ \cdot +}{+} = +$ (на нижней оси) и расставим знаки по принципу чередования.

рис. 6.

Из рис. 6 приходим к ответу: $x \in (-3; -2) \cup \{1\} \cup (2.5; 3)$.

Пример 16. Решить неравенство. $\dfrac{(3-5x^{-1})^2}{3+4x^{-1}} \leqslant 0$. Решение. Приведём неравенство к исследованному ранее виду $\frac{(x-x_k)\dots}{(x-x_i)\dots}$:

$$\frac{(3-5x^{-1})^2}{3+4x^{-1}} = \frac{\left(\frac{3x-5}{x}\right)^2}{\frac{3x+4}{x}} = \frac{(3x-5)^2}{x(3x+4)} \leqslant 0.$$

Теперь можно решать методом интервалов. Находим корни: $x = \frac{5}{3}, x = 0, x = -\frac{4}{3}$. Знаки находим при $x = 2$: $\frac{+}{++} = +$.

Ответ: $x \in (-\frac{4}{3}; 0)\{\frac{5}{3}\}$.

1.3 Иррациональные уравнения и неравенства.

Соответствие f: $x \to y = x^2$ – квадратичная функция (*функция* – такое соответствие, при котором каждому x соответствует только одно y), но – не взаимнооднозначное (так как $2, -2 \to 4$, то есть разным значениям x соответствуют одинаковые значения y, поэтому обратное соответствие f^{-1}: $y \to x$ – не функция (рис. 7). Тем не менее можно договориться, что функция $f : x \to y = x^2$ определена только для неотрицательных

рис. 7.

Функция, обратная для квадратной называется *арифметическим квадратным корнем* или просто *квадратным корнем* $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Принято переменную функции – *аргумент* обозначать как x, а значение функции – как y. Таким образом, квадратный корень $\sqrt{x}$ – это функция, обратная $y = x^2, x \geqslant 0$, область допустимых значений и множество значений которой – все неотрицательные числа.

Соответствие $f : x \to y = x^3$ – *кубическая функция*, взаимнооднозначно, поэтому обратное соответствие $f^{-1}(y) = x$ – тоже функция, определённая при всех действительных x. Функция, обратная кубической, называется *кубическим корнем* и $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Таким образом можно сделать вывод:

– для любого чётного числа $n = 2k$ функция $f(x) = x^{2k}, x \geqslant 0$ имеет обратную $f^{-1}(x) = \sqrt[2k]{x}$, только при $x \geqslant 0$;

– для любого нечётного числа $n = 2k+1$ функция $f(x) = x^{2k+1}$ имеет обратную $f^{-1}(x) = \sqrt[2k+1]{x}$, x – любое.

Корень n-ой степени $\sqrt[n]{x}$ из числа x принято обозначать также как $x^{\frac{1}{n}}$. В этом случае $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$. Таким образом определена дробная степень числа.

Уравнение или неравенство, содержащее дробную степень, называется *иррациональным.* Оно обычно решается обратным преобразованием, с помощью которого избавляются от иррациональности. Например, для квадратного корня обратное преобразование – возведение в квадрат на множестве неотрицательных чисел, а для кубического корня – возведение в куб. Чтобы при решении задачи не приобретать посторонних корней (п. к.), необходимо учитывать О. Д. З. Решают О. Д. З. всегда для неравенств, а для уравнений часто достаточно ограничиться проверкой. При решении задач, содержащих иррациональность, кроме О. Д. З. корней, заданных в условии, полезно указывать ограничения на производимые операции, что можно назвать как Д. У. – дополнительное условие.

Пример 17. Решить уравнение: $\sqrt[5]{x} = -2$.

Решение. Левую и правую часть уравнения возведём в пятую степень, то есть произведём операцию, обратную корню пятой степени, тогда $x = -32$. Ответ: $x = -32$.

Пример 18. Решить уравнение: $\sqrt{10-x} - \sqrt{x+3} = 1$.

Решение. Левая часть уравнения – разность, поэтому при возведении в квадрат можно приобрести посторонний корень. Чтобы этого не произошло перенесём корень $\sqrt{x+3}$ вправо: $\sqrt{10-x} = 1 + \sqrt{x+3}$. Теперь левую и правую части возведём в квадрат (операция, обратная квадратному корню).

$$\begin{array}{ll}
10 - x = 1 + 2\sqrt{x+3} + x + 3 & \qquad \left\{\begin{array}{l} \text{О. Д. З.} \\ 10 - x \geqslant 0 \\ x + 3 \geqslant 0 \\ 3 - x \geqslant 0 \quad \text{– Д. У.} \end{array}\right. \\
3 - x = \sqrt{x+3} & \\
x^2 - 7x + 6 = 0 & \\
x_1 = 1, \quad x_2 = 6 - \text{п.к.} &
\end{array}$$

Неравенство $3 - x \geqslant 0$ – Д. У. и именно ей не удовлетворяет второй корень $x = 6$, который поэтому посторонний. Ответ: $x = 1$.

Пример 19. Упростить. $\dfrac{\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}} + \frac{\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}} - \sqrt[6]{b}$.

Решение. Упрощаем выражение по действиям.

1. $\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{b^3}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}} = \dfrac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})} =$
$= \dfrac{\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$

2. $\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a})}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2} = -\dfrac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$

3. $\dfrac{\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} - \dfrac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \dfrac{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$

4. $\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}} = \dfrac{(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}} = \sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$

5. $\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}-\sqrt[6]{b}=\sqrt[6]{a}$. Ответ: $\sqrt[6]{a}$.

В некоторых задачах оказывается полезной формула:

$$(\sqrt{a})^2 = \begin{cases} a, \\ a \geqslant 0. \end{cases}$$

Пример 20. Решить неравенство: $\dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{x^2-6x+8} \leqslant 0$.

Решение. Разложим числитель и знаменатель на множители: $\dfrac{\sqrt{x(x-3)}}{(x-2)(x-4)} \leqslant 0$. Тогда исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x(x-3) \geqslant 0 \\ \dfrac{x(x-3)}{(x-2)(x-4)} \leqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: $x \in \{0\} \cup [3;4)$.

Пример 21. Решить неравенство: $\sqrt{6x+25} < x+5$.

Решение. Если правая часть неравенства отрицательна, то решений нет, поэтому возможен только случай, когда правая часть неравенства

$\geqslant 0$. Добавляя О. Д. З. и возводя в квадрат, получим:

$$\begin{cases} x+5 \geqslant 0 \\ 6x+25 \geqslant 0 \\ 6x+25 < (x+5)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geqslant -5 \\ x \geqslant -25/6 \\ x(x+4) > 0. \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-25/6; -4) \cup (0; +\infty)$.

Пример 22. Решить неравенство: $\sqrt{3x+1} > 2x-1$.

Решение. Так как данное неравенство решается возведением в квадрат, то необходимо изучить знаки выражений. Возможны два случая: если $2x-1<0$, тогда неравенство справедливо для всех x, при которых определён корень:

$$\begin{cases} 2x-1<0 \\ 3x+1 \geqslant 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x<1/2 \\ x \geqslant -1/3 \end{cases}, \quad x \in [-1/3; 1/2);$$

если $2x-1 \geqslant 0$, тогда

$$\begin{cases} 2x-1 \geqslant 0 \\ 3x+1 > (2x-1)^2 \end{cases} \begin{cases} x \geqslant 1/2 \\ 4x(x-7/4) < 0 \end{cases}$$

Общее решение получим объединением частных решений.

Ответ: $x \in [-1/3; 7/4)$.

В том случае, когда дробь содержит многочлен и иррациональность «метод интервалов» по-прежнему применим.

Пример 23. Решить неравенство: $\dfrac{(x-5)^2(\sqrt{x+2}-4)}{x-3} \geqslant 0$.

Так как иррациональное выражение $\sqrt{x+2}-4$ – это возрастающая функция, то с точки зрения нахождения знака дроби это выражение отличается от линейного двучлена $(x-x_{\text{кор.}})$ только наличием О.Д.З. иррациональности.

Решение. Выделим все шаги рассуждения, приводящие к решению:

1. Находим О.Д.З.: $x+2 \geqslant 0, \quad x \geqslant -2$.

2. Находим корни числителя и знаменателя:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{x+2}-4=0 & x-3=0 & (x-5)^2=0 \\ x=14 & x=3 & x=5. \end{array}$$

3. Отмечаем найденные корни на числовой оси.

а) если бы заданное неравенство было бы строгим, то все корни имели бы вид выколотых точек, но так как в условии указан знак нестрогого неравенства, то

– корни знаменателя отмечаются как выколотые точки;

– корни числителя отмечаются как закрашенные точки;

б) отмечаем чётные корни стрелкой;

в) разбиваем числовую прямую на области, обходя стрелки;

г) находим знак неравенства в крайней правой области (например, подставляя «разумное значение» x: $x = 23 : \frac{++}{+} = +$);

д). расставляем знаки по «принципу чередования»:

– знаки чередуются, начиная с крайней правой области;

– справа и слева от стрелки знак одинаковый; (рис. 9)

е) находим область совместной штриховки.

Ответ: $[-2; 3) \cup \{5\} \cup [14; +\infty)$.

рис. 8.

Пример 24. Решить неравенство: $\dfrac{\sqrt{6x+3}}{x} \leqslant 3$.

Решение. 1 -й способ. Найдём О. Д. З.: $6x + 3 \geqslant 0, x \geqslant -\frac{1}{2}$. Знаменатель имеет достаточно простой вид, поэтому желательно избавиться от него умножением на x как левой, так и правой частей неравенства. Но так знаменатель – не постоянная, а переменная величина, то в зависимости от знака числа x после операции умножения может измениться и знак неравенства. С другой стороны, замечаем, что при $x < 0$ неравенство верно на всей области допустимых значений, поэтому при $x < 0$ можно выписать решения: $[-\frac{1}{2}; 0)$. Пусть $x > 0$. Умножим неравенство на x. В результате получим:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{6x+3} \leqslant 3x \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ 6x + 3 \leqslant 9x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ 3(x-1)(x+\frac{1}{3}) \geqslant 0 \end{cases}, x \geqslant 1$$

Ответ: $x \in [-\frac{1}{2}; 0) \cup [1; +\infty)$.

2 -й способ. Перенесём всё в левую часть и приведём к общему знаменателю: $\dfrac{\sqrt{6x+3} - 3x}{x} \leqslant 0$. Полученное неравенство решаем точно также как и в предыдущем примере:

1. О.Д.З.: $x \geqslant -\frac{1}{2}$.

2. Корни: $x = 0, x = 1$. Заметим, что число $x = -\frac{1}{3}$ является посторонним корнем, поэтому мы не указываем его на числовой прямой как корень, в котором выражение меняет знак.

3. Ответ будет такой же:
$x \in [-\frac{1}{2}; 0) \cup [1; +\infty)$.

рис. 9.

Второй способ решения задачи является более предпочтительным, так как опирается на стандартизированные шаги рассуждения.

1.4 Модуль.

Модуль числа a обозначается как $|a|$ и определяется следующим образом:

$$|a| = \left[\begin{array}{ll} a, & \text{если} \quad a \geqslant 0 \\ -a, & \text{если} \quad a < 0. \end{array} \right.$$

Следствие из определения модуля: $|a| = \sqrt{a^2}$.

Упражнения, содержащие модуль, обычно решаются разбиением числовой оси на области, где подмодульное выражение имеет постоянный знак с последующим нахождением решения в каждой из выделенных областей.

Пример 25. Решить уравнение: $|x + 12| + 3x = 20$.

Решение.

$$\begin{cases} x + 12 \geqslant 0 \\ x + 12 + 3x = 20 \end{cases} \begin{cases} x \geqslant -12 \\ \underline{x = 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 12 < 0 \\ -(x + 12) + 3x = 20 \end{cases} \begin{cases} x < -12 \\ x = 16 \text{ – п. к.} \end{cases}$$

Ответ: $x = 2$.

Иногда решение основано на понимании того, что такое модуль. Так, в соответствии с определением модуля, уравнение $|x| = 5$ означает, что $x = \pm 5$, а уравнение $|x| = -2$ – не имеет решений. В данном случае нет необходимости в более подробном рассмотрении модуля.

Пример 26. Решить уравнение: $||x - 2| - 5| = 8$.

Решение. 1. $|x - 2| - 5 = 8$
$|x - 2| = 13$
$x_1 = 15, x_2 = -11$

2. $|x - 2| - 5 = -8$
$|x - 2| = -3$
$\varnothing$.

Ответ: $\{-11; 15\}$.

Пример 27. Решить уравнение: $||3-x|-2| = |1-x|$.

Решение. Если $|b| = |a|$, то $b^2 = a^2$, или $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) = 0$. Откуда $b = \pm a$. Следовательно 1. $|3-x|-2 = 1-x$ или 2. $|3-x|-2 = -(1-x)$.

$$1. \begin{cases} 3-x \geqslant 0 \\ 3-x-2 = 1-x \end{cases} \begin{cases} x \leqslant 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 3-x \geqslant 0 \\ 3-x-2 = -1+x \end{cases} \begin{cases} x \leqslant 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3-x < 0 \\ -3+x-2 = 1-x \end{cases} \begin{cases} x > 3 \\ x = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3-x < 0 \\ -3+x-2 = -1+x \end{cases} \begin{cases} x > 3 \\ \varnothing. \end{cases}$$

Ответ: $x \leqslant 3$.

Пример 28. Решить уравнение: $|x-2| + |3x+6| = 5$.

Решение. На числовой оси отметим точки, в которых подмодульные выражения равны нулю, и в каждой из областей решаем уравнение отдельно (на рис. 10 первый знак соответствует знаку двучлена $x-2$, а второй знак – двучлена $3x+6$).

рис. 10.

I.	$-(x-2)-(3x+6) = 5$	откуда	$x = -9/4$	
II.	$-(x-2)+3x+6 = 5$	откуда	$x = -1.5$	
III.	$x-2+3x+6 = 5$	откуда	$x = 1/4$	– п.к.

Ответ: $x = -2.25, -1.5$.

Ряд заданий, в которых содержится модуль, основаны на выделении квадрата в подкоренном выражении. Решение подобных заданий основано на следствии из определения модуля.

Пример 29. Упростить: $\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Решение. При упрощении подобных выражений необходимо разбить целое число (здесь это 4) на сумму квадратов двух чисел, чтобы в произведении они образовывали подкоренной корень (здесь $\sqrt{3}$): $4+2\sqrt{3} = 3+1+2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$. Таким образом $\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}} = (1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})^2 = |1+\sqrt{3}| + |1-\sqrt{3}| = 1+\sqrt{3}-(1-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Пример 30. Решить неравенство: $|x| < 5$.

Решение. Если $x \geqslant 0$, то $x \in [0, 5)$. Если $x < 0$, то $x \in (-5, 0)$. Ответ: $(-5, 5)$.

В некоторых случаях вместо использования определения модуля удобно использовать готовые формулы перехода от модуля к выражениям без модуля. Например,

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x). \tag{1.8}$$

Действительно, если $g(x) < 0$, то оба неравенства не имеют решений. Если же $g(x) \geqslant 0$, то справедливость (1.8) понятна из решения примера (30).

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right. \tag{1.9}$$

Опять, если $g(x) < 0$, то оба утверждения справедливы при любых x. Если же $g(x) \geqslant 0$, то для неотрицательных $f(x)$ верно одно утверждение совокупности, а для неположительных $f(x)$ – другое.

(Ясно, что формулы (1.8 – 1.9) справедливы и в случае нестрогих утверждений.)

Пример 31. Решить неравенство: $|2x - 10| < 3x$.

Решение. По формуле (1.8) получим:

$$-3x < 2x - 10 < 3x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x - 10 < 3x \\ 2x - 10 > -3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x > -7 \\ x > 2 \end{array}\right.$$

Ответ: $x > 2$.

Пример 32. Решить неравенство: $|3x + 4| > 5x + 8$.

Решение. По формуле (1.9) получим:

$$\left[\begin{array}{c} 3x + 4 > 5x + 8 \\ 3x + 8 < -5x - 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x < -2 \\ x < -1.5 \end{array}\right.$$

Ответ: $x > 2$.

Пример 33. При $x \in [3; 4]$ упростить выражение:

$$\sqrt{x - 2 - 2\sqrt{x-3}} + \sqrt{x - 2 + 2\sqrt{x-3}}.$$

Решение. $\sqrt{x - 2 - 2\sqrt{x-3}} + \sqrt{x - 2 + 2\sqrt{x-3}} = \sqrt{x - 3 - 2\sqrt{x-3} + 1} + \sqrt{x - 3 + 2\sqrt{x-3} + 1} = \sqrt{(\sqrt{x-3} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-3} + 1)^2} = |\sqrt{x-3} - 1| + |\sqrt{x-3} + 1| =$ (при $x \in [3; 4]$) $-(\sqrt{x-3} - 1) + \sqrt{x-3} + 1 = 2$. Ответ: 2.

Пример 34. Решить неравенство: $\dfrac{x}{|x + 4| - 3} \leqslant 2$.

Решение.

$$I. \left\{\begin{array}{r} x + 4 \geqslant 0 \\ \dfrac{x}{(x + 4) - 3} - 2 \leqslant 0. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{r} x \geqslant -4 \\ -\dfrac{x + 2}{x + 1} \leqslant 0. \end{array}\right.$$

Решение первого случая: $x \in [-4; -2] \cup (-1; +\infty)$.

$$II. \begin{cases} x+4<0 \\ \dfrac{x}{-(x+4)-3}-2 \leqslant 0. \end{cases} \begin{cases} x<-4 \\ \dfrac{3x+14}{-x-7} \leqslant 0. \end{cases}$$

Решение второго случая: $x \in (-\infty; -7) \cup [-14/3; -4)$.

Решение задачи в целом получим, объединяя ответ первого и второго случаев. Ответ: $(-\infty; -7) \cup [-14/3; -2] \cup (-1; +\infty)$.

Пример 35. Решить неравенство: $|x^2-3x+1| > |3x^2+5x-3|$.

Решение. $(x^2-3x+1)^2-(3x^2+5x-3)^2 > 0$ или по формуле разности квадратов:

$$-2 \cdot 2 \cdot (x+1)(x-0.5)(x+2-\sqrt{6})(x+2+\sqrt{6}) > 0.$$

Ответ: $(-2-\sqrt{6}; -1) \cup (-2+\sqrt{6}; 0.5)$.

В случае одного модуля в задаче нет необходимости в методе интервалов достаточно использовать определение модуля.

Пример 36. Решить неравенство: $|2x+6|+x \geqslant 3$.

Решение. $\begin{cases} 2x+6<0 \\ -(2x+6)+x \geqslant 3 \end{cases} \begin{cases} x<-3 \\ -x \geqslant 9 \end{cases}, \quad x \leqslant -9.$

$$\begin{cases} 2x+6 \geqslant 0 \\ 2x+6+x \geqslant 3 \end{cases} \begin{cases} x \geqslant -3 \\ x \geqslant -1 \end{cases}, \quad x \geqslant -1.$$

Ответ: $(-\infty; -9] \cup [-1; +\infty)$.

1.5 Системы уравнений.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x, y, \ldots, z) = 0 \\ \ldots \\ f_n(x, y, \ldots, z) = 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

означает найти все $x^*, y^*, \ldots, z^*$, при подстановке которых в (1.10), каждое уравнение этой системы превращается в верное равенство.

Решить совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{c} g_1(x,y,\dots,z)=0 \\ \dots \\ g_n(x,y,\dots,z)=0. \end{array}\right. \tag{1.11}$$

означает найти все $x^*, y^*, \dots, z^*$, при подстановке которых в (1.10), хотя бы одно уравнение этой совокупности превращается в верное равенство.

Указанные числа $x^*, y^*, \dots, z^*$ называются *корнями* системы (1.10) или соответственно совокупности (1.11). Если каждое из уравнений (1.10) ((1.11)) линейное, система (совокупность) называется *системой (совокупностью) линейных уравнений*, в противном случае – *системой (совокупностью) нелинейных уравнений.*

Решить уравнение, значит найти все его корни.

Системы уравнений имеют хорошо разработанные методы решения. В первую очередь это *метод подстановки*, который будет понятен из следующего примера.

Пример 37. Решить систему: $\begin{cases} 3x+5y=1 \\ 2x-y=5. \end{cases}$

Из второго уравнения выразим переменную y и подставим в первое уравнение, после чего найдём x, затем y:

$$\begin{cases} y=2x-5 \\ 3x+5(2x-5)=1 \end{cases} \begin{cases} 3x+10x-25=1 \\ x=2 \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=-1. \end{cases}$$

Ответ: $x=2, y=-1$.

Преобразования системы уравнений, в общем-то, приводят к другой системе, поэтому важно, чтобы они не изменяли корней. Преобразования, при которых сохраняются корни, называются *эквивалентными.* Так, для системы двух уравнений $\begin{cases} A=B \\ C=D \end{cases}$ эквивалентными будут следующие преобразования:

1) изменение порядка строк уравнений;

2) к уравнению системы можно прибавлять другое уравнение системы, то есть системы $\begin{cases} A=B \\ C=D \end{cases}$ и $\begin{cases} A=B \\ A+C=B+D \end{cases}$ эквивалентны.

3) уравнения системы можно умножать на ненулевые числа, то есть при $k_1, k_2 \neq 0$ системы $\begin{cases} A=B \\ C=D \end{cases}$ и $\begin{cases} k_1A=k_1B \\ k_2C=k_2D \end{cases}$ эквивалентны.

Очевидно преобразования 1) – 3) распространяются на системы, содержащие более двух уравнений.

Преобразования 2) – 3) называются *линейными*, а метод решения систем линейных уравнений, основанных на этих преобразованиях, – *методом Гаусса*. Рассмотрим этот метод на примере.

Пример 38. Решить систему: $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 4x + 5y = 3. \end{cases}$

Решение. Умножим верхнее уравнение системы на 5 и прибавим к нижнему, – исключая переменную y. Затем сложим верхнее уравнение, умноженное на -4, с нижним, умноженным на 3, – исключая x:

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases} + \begin{matrix} \cdot 5 \\ \cdot 1 \end{matrix} \qquad + \begin{matrix} \cdot(-4) \\ \cdot 3 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 15x - 5y + 4x + 5y = 35 + 3 \\ -12x + 4y + 12x + 15y = -28 + 9 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \end{cases}$$

Ответ: $x = 2, y = -1$.

Методы подстановки и Гаусса для систем с большим числом уравнений такие же:

– в методе подстановки из первого (не по порядку записи, а по выбору) уравнения выражается какая-либо переменная и подставляется во все другие уравнения системы. Затем из второго уравнения выбирается следующая переменная и опять подставляется во все уравнения системы и так далее – пока не будет получено решение.

– в методе Гаусса выбранное первым уравнение умножается на ненулевое число и прибавляется ко всем другим уравнениям системы так, чтобы выбранная переменная исключалась. Затем второе уравнение умножается на ненулевое число и прибавляется ко всем другим уравнениям, исключая следующую переменную, и так далее – пока не приходим к решению.

Рассмотрим метод Гаусса на примере системы из трёх уравнений.

Пример 39. Решить систему: $\begin{cases} 2x & +y & -3z & = & 11 \\ 3x & -2y & +4z & = & -11 \\ 2x & -y & -z & = & 1. \end{cases}$

Решение. Умножим верхнее уравнение на 2 и прибавим ко второму, затем его же прибавим к третьему (исключаем y). Наконец нижнее уравнение делим на 4. В результате получим:

$$\begin{cases} 2x & +y & -3z & = 11 \\ 7x & & -2z & = 11 \\ x & & -z & = 3. \end{cases}$$

Нижнее уравнение, умноженное на (-2), прибавим к среднему, а умноженное на (-3), прибавим к верхнему (исключим z). Разделим среднее на 5:

$$\begin{cases} -x \quad +y \qquad = \quad 2 \\ x \qquad\qquad\quad = \quad 1 \\ x \qquad\quad -z \quad = \quad 3. \end{cases}$$

Наконец, среднее уравнение прибавим к верхнему и, умножив на -1, прибавим к нижнему. В результате получим, что $x = 1, y = 3, z = -2$.

Ответ: $x = 1, y = 3, z = -2$.

В отличии от приведённых выше примеров, когда решение было одно, может оказаться, что система не имеет решений вовсе или их бесконечно много.

Пример 40. Решить систему: $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 3. \end{cases}$

Решаем методом Гаусса. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} + \cdot -2 \downarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 0 = -1 \end{cases}$

Так как одно из уравнений системы не имеет решений, то, в соответствии с определением решения системы уравнений, и вся система не имеет решений. Ответ: решений нет $(\varnothing)$.

Пример 41. Решить систему: $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4. \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} y = 2 - x \\ 2x + 2(2 - x) = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 - x \\ 0 = 0. \end{cases}$

Нижнее уравнение стало тождеством. Из верхнего уравнения системы следует, что по любому наперёд заданному x можно найти y. Следовательно, данная система имеет бесчисленное множество решений.

Ответ: $x = C, y = 2 - C$, где C – любое действительное число (кратко это же записывается так: $\forall x \in R$).

При решении системы нелинейных уравнений можно выделить ряд стандартных приёмов, которые используются на различных этапах решения.

Пример 42. Решить систему: $\begin{cases} x^2 - y^2 + 4xy = 11 \\ 3x - y = 5. \end{cases}$

Решение: Так как нижнее уравнение линейно по переменным x и y, то одну переменную можно выразить через другую и подставить её в верхнее уравнение. Затем решить уравнение с одной переменной:

$$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ x^2 - (3x - 5)^2 + 4x(3x - 5) = 11 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 4x^2 + 10x - 36 = 0 \\ x_1 = 2, x_2 = -9/2. \end{matrix}$$

По x найдём y. Ответ: $\{(2;1),(-9/2;-37/2)\}$.

Пример 43. Решить систему: $\begin{cases} x+y+xy=7 \\ x+y-xy=1. \end{cases}$

Решение. Видно, что оба уравнения системы состоят из одинаковых «кусочков» вида $x+y$ и xy, поэтому обозначим их через новые переменные (*метод введения новых переменных*):

$$\begin{cases} a=x+y \\ b=xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ a-b=1 \end{cases} \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ xy=3. \end{cases}$$

Решая методом подстановки, приходим к ответу: $\{(1;3),(3;1)\}$.

Функция $f(x,y,\ldots,z)$, удовлетворяющая свойству $f(\lambda x,\lambda y,\ldots,\lambda z)=\lambda^n\cdot f(x,y,\ldots)$, называется *однородной функцией n-го порядка*, где n – *степень однородности*.

Однородные уравнения с двумя переменными, то есть уравнения вида $f(x,y)=0$, с однородной функцией $f(x,y)$ решаются делением уравнения на переменную в степени однородности.

Пример 44. Решить систему: $\begin{cases} 4x^2-3xy-y^2=0 \\ 5x^2+xy+3y^2=1. \end{cases}$

Решение: Первое уравнение является однородным уравнением второго порядка, поэтому будем его делить на y^2, но прежде необходимо проверить, не произойдёт ли потери корней? Пусть $y=0$, тогда $\begin{cases} 4x^2=0 \\ 5x^2=1 \end{cases}$, $\varnothing$. Следовательно $y=0$ не корень.

$$\begin{cases} 4x^2-3xy-y^2=0 \\ 5x^2+xy+3y^2=1 \end{cases} :y^2 \quad \begin{cases} 4(\frac{x}{y})^2-3(\frac{x}{y})-1=0 \\ 5x^2+xy+3y^2=1 \end{cases}$$

$$\frac{x}{y}=t \quad\Rightarrow\quad 4t^2-3t-1=0 \quad\Rightarrow\quad t_1=1,\quad t_2=-1/4$$

$$a).\begin{cases} x/y=1 \\ 5x^2+xy+3y^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=y \\ 9y^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1/3 \\ y=1/3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=-1/3 \\ y=-1/3 \end{cases}$$

$$b).\begin{cases} x/y=-1/4 \\ 5x^2+xy+3y^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1/7 \\ y=-4/7 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=-1/7 \\ y=4/7. \end{cases}$$

Ответ: $\{(\pm1/3;\pm1/3),(\pm1/7;\mp4/7)\}$.

Может оказаться, что оба уравнения системы неоднородны, хотя они и содержат однородную функцию одного порядка как в следующем примере.

Пример 45. $\begin{cases} 22x^2+35xy+14y^2=4 \\ 17x^2+25xy+10y^2=8. \end{cases}$

Заметим, что любая *линейная комбинация* функций $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ (то есть комбинация вида $\alpha f_1(x,y)+\alpha_2 f_2(x,y)$, где α_1,α_2 – числа) одинаковой степени однородности также является однородной функцией того же порядка.

Решение. Умножим первую строку системы на -2 и прибавим ко второй – приведём верхнее уравнение системы к однородному виду:

$$\left\{\begin{array}{l} 22x^2+35xy+14y^2=4 \\ 17x^2+25xy+10y^2=8. \end{array}\right. \begin{array}{c} \cdot -2 \downarrow \\ + \end{array} \left\{\begin{array}{l} -27x^2-45xy-18y^2=0 \\ 17x^2+25xy+10y^2=8. \end{array}\right.$$

Так как при $y=0$ решений нет, то делим верхнее уравнение на y^2 и, заменяя $x/y=t$, придём к квадратному уравнению: $3t^2+5t+2=0$, из которого находим $t_{1,2}=(-5\pm 1)/6$. Далее,

$$a).\left\{\begin{array}{c} x/y=-1 \\ 17x^2+25xy+10y^2=8 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ y=\mp 2 \end{array}\right.$$

$$b).\left\{\begin{array}{c} x/y=-2/3 \\ 17x^2+25xy+10y^2=8 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ y=\mp 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{(\pm 2;\mp 2),(\pm 2;\mp 3)\}$.

К однородным уравнениям относятся уравнения и с одной переменной.

Пример 46. Решить уравнение. $(x+4)^2(x-1)^2+3(x-1)^4=52(x+4)^4$.

Решение. Введём обозначения: $\left\{\begin{array}{l} a=(x+4)^2 \\ b=(x-1)^2 \end{array}\right.$. Тогда $ab+3b^2=52a^2$.

Так как $a=0$ – не корень, то делим исходное уравнение на a^2 и, обозначая $t=(b/a)^2$, находим $t=4$.

a). При $b/a=2$ или $(x-1)/(x+4)=2$ получим $x=-9$.

b). При $b/a=-2$ или $(x-1)/(x+4)=-2$ получим $x=-7/3$.

Ответ: $\{-9;-7/3\}$.

1.6 Задания.

1. Вычислить

1). $\dfrac{(1.5)^3\cdot(2.25)^{1.5}\cdot(0.75)^{-3}}{(-\frac{1}{2})^{-2}+(-\frac{1}{2})^{-1}-(2^{-1})^{-1}+(2\frac{3}{7})^0}$ 2). $\dfrac{(0.2)^{-2}\cdot 5^{-1}+(7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{3}}}{3^{-5}\cdot(\frac{1}{9})^2\cdot 81^2}$

2. Представить в виде произведения.

1). a^4+3a^2+4	3). a^4+6a^2+25	5). a^4-13a^2+36
2). a^4-3a^2+9	4). $4a^4+25$	6). a^4-5a^2+4

3. Пусть x_1, x_2 – различные корни уравнения $f(x) = 0$. Найти:

1). $x_1^2x_2 + x_2^2x_1$ и $x_1^2 + x_2^2$, если $f(x) = x^2 - 3x - 7$

2). $(x_1 \cdot x_2)^{x_2+x_1}$, если $f(x) = 3x^2 - 9x + 2$

3). $\dfrac{1}{x_1 + 2x_2} + \dfrac{1}{2x_1 + x_2}$, если $f(x) = 2x^2 - x - 8$

4). $f(x_1 + 1) + f(x_2 + 1)$, если $f(x) = 2x^2 - x - 7$

5). $f(x_1 - 1) \cdot f(x_2 - 1)$, если $f(x) = 3x^2 - 6x - 2$

6). $f(x_1 - 1) + f(x_2 - 1)$, если $f(x) = 2x^2 - 4x - 5$

7). Составить приведённое квадратное уравнение с корнями $x_1 + 2$ и $x_2 + 2$, если $f(x) = x^2 - 7x - 15$

8). Составить приведённое квадратное уравнение с корнями $x_1 - 1$ и $x_2 - 1$, если $f(x) = x^2 - 3x - 7$

4. Решить уравнение.

1). $x^2 + 3x + 5\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 20$ 3). $4x^2 + 6x + \sqrt{2x^2 + 3x + 2} = 6$

2). $x^2 - 5x + 3\sqrt{x^2 - 5x + 22} = 6$ 4). $2x + \dfrac{6}{x} + 3\sqrt{2x + \dfrac{6}{x} - 3} = 13$

5). $\sqrt{x^2 - 6x + 10} + 4x^2 - 24x + 35 = 0$

6). $\sqrt{x^2 - 4x + 8} + 3x^2 - 12x + 10 = 0$

7). $\sqrt{2x^2 + 12x + 27} + x^2 + 4x + 2 = 0$

5. Решить уравнение.

1). $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ 3). $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

2). $x^3 - x^2 - 22x + 40 = 0$ 4). $x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = 0$

6. Найти наименьшее значение функции.

1). $f(x) = \dfrac{x^4 + 4x^2 + 16}{x^2 + 2x + 4}$ 2). $f(x) = \dfrac{4x^4 + 3x^2 + 9}{2x^2 - 3x + 3}$

7. Решить уравнение.

1). $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$ 2). $2x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 2 = 0$

8. Решить уравнение.

1). $(x^2 - 4)^2 - 6(x^2 - 4)(x^2 - 10) + 8(x^2 - 10)^2 = 0$

2). $(x + 4)^4 - 13(x + 4)^2(2x - 7)^2 + 36(2x - 7)^4 = 0$

3). $(x - 6)^4 - 5(x - 6)^2(3x + 2)^2 + 4(3x + 2)^4 = 0$

9. Решить систему.

1). $\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$ 2). $\begin{cases} -2x + y = -10 \\ 4x - 2y = 20 \end{cases}$ 3). $\begin{cases} 3x + 4y = 19 \\ 6x + 8y = 9 \end{cases}$

4). $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ 5). $\begin{cases} x + 2y - z = -6 \\ 2x + y - z = -3 \\ 3x + y - 2z = -5 \end{cases}$

10. Решить систему.

1). $\begin{cases} x^2 - 3x + y - y^2 = -4 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ 2). $\begin{cases} 2x^2 - y^2 - x = -6 \\ x + y = 2 \end{cases}$

3). $\begin{cases} \dfrac{x}{2y} - \dfrac{2y}{x} = \dfrac{5}{6} \\ x^2 - 4y^2 = 5 \end{cases}$ 4). $\begin{cases} 2x + y + \dfrac{x}{3y} = 9 \\ \dfrac{(2x+y)x}{3y} = -10 \end{cases}$

5). $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 2 \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{9}{y} = 7 \end{cases}$ 6). $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{5}{y^2} = 53 \\ \dfrac{12}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 57 \end{cases}$

7). $\begin{cases} \dfrac{5}{x} + \dfrac{7}{y} = 8 \\ \dfrac{x}{10} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$ 8). $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 + 5xy = 0 \\ 7x^2 + 5y^2 + 4xy = 64 \end{cases}$

9). $\begin{cases} -9x^2 + 20y^2 + 10xy = 4 \\ 5x^2 - 4y^2 - 2xy = 12 \end{cases}$ 10). $\begin{cases} 3x^2 + 40y^2 + 28xy = 60 \\ -33x^2 + 50y^2 + 7xy = 40 \end{cases}$

11). $\begin{cases} 29x^2 - 32xy - 64y^2 = -48 \\ 19x^2 - 20xy - 40y^2 = -16 \end{cases}$ 12). $\begin{cases} 3x^2 + xy + 4y^2 = 72 \\ 4x^2 + 3xy + 5y^2 = 108 \end{cases}$

11. Решить уравнение.

1). $(x^2 - 5x)^2 - 5(x^2 - 5x) = x$ 3). $2(2x^2 + 7x)^2 + 7(2x^2 + 7x) = x$

2). $(x^2 - 3x)^2 - 3(x^2 - 3x) = x$ 4). $3(3x^2 + 4x)^2 + 4(3x^2 + 4x) = x$

12. Решить неравенство:

1). $\dfrac{2}{x-5} \leqslant \dfrac{7}{x-1}$ 2). $\dfrac{4}{x+2} > \dfrac{2}{x-1}$

3). $\dfrac{x(x-2)}{(x+1)(x-3)} < 0$ 4). $\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x+4)} < 0$

5). $\dfrac{(x^2-4x)(3+x)}{(x+2)(x-1)} \geqslant 0$ 6). $\dfrac{(x^2-6x+8)(x+3)}{(x^2-4x-5)(x+2)} \leqslant 0$

7). $\dfrac{(x^2-5x+6)(x+1)}{(3x-x^2-4)x} \geqslant 0$ 8). $\dfrac{(x^2-7x+13)(x^2-6x+8)}{(x-x^2-5)(3+x)} \geqslant 0$

9). $\dfrac{(x-5)(x+3)}{(x-2)^2} < 0$ 10). $\dfrac{(3x-1-5x^2)(x^2-7x+12)}{(x-2x^2-7)(15-x^2-2x)} \geqslant 0$

11). $\dfrac{(x+1)(x-4)x}{(x-3)^2} \leqslant 0$ 12). $\dfrac{(2x-10)(x-1)^2}{(x+2)(x-6)} \leqslant 0$

13). $\dfrac{(3x+9)(2+x)^2}{(1-x)(x+5)} \leqslant 0$ 14). $\dfrac{(4-x)(3+x)^2}{(5+x)(x^2-6x)} \leqslant 0$

13. Решить неравенства.

1). $\dfrac{(3-2x^{-1})^2}{4+3x^{-1}} \leqslant 0$ 2). $\dfrac{(2+5x^{-1})^2}{3+7x^{-1}} \geqslant 0$

3). $\dfrac{(2+3x^{-1})^2}{(3-4x^{-1})^2(5-2x^{-1})} \leqslant 0$ 4). $\dfrac{(5-2x^{-1})^2(2-3x^{-1})}{(4+3x^{-1})^2(7-5x^{-1})} \leqslant 0$

5). $\dfrac{2-3x^{-1}}{(4-7x^{-1})^2} \leqslant 0$ 6). $\dfrac{2-5x^{-1}}{(3+2x^{-1})^2} \geqslant 0$

14. Решить неравенства.

1). $\begin{cases} \dfrac{x(x+2)}{(x-1)(x+4)} \leqslant 0 \\ \dfrac{(x-4)(x-1)}{(2-x)(3+x)} \geqslant 0 \end{cases}$ 2). $\begin{cases} \dfrac{(2x+8)(3-x)}{x^2(x-1)} \leqslant 0 \\ \dfrac{(x-6)(x+1)}{(x-x^2-1)(x-2)} \geqslant 0 \end{cases}$

3). $\begin{cases} \dfrac{(8-x)(x+1)^2}{(2+x)x^2} \leqslant 0 \\ \dfrac{(4-x)(x-1)(x+5)}{(x-3x^2-5)(x-7)} \leqslant 0 \end{cases}$ 4). $\begin{cases} \dfrac{(2-x)(x+1)}{x^2} < 0 \\ \dfrac{(3+x)(x+2)}{(7-x)(x+1)} > 0 \end{cases}$

5). $\left[\begin{array}{l} \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-1)^2} < 0 \\ \dfrac{(x+2)(x-3)}{x^2} < 0 \end{array} \right.$ 6). $\left[\begin{array}{l} \dfrac{(7+x)(x+4)}{(x-3)^2} \leqslant 0 \\ \dfrac{(5+x)(8-x)^2}{3-x} \geqslant 0 \end{array} \right.$

15. Решить уравнение.

1). $|2x-5| = 13$ 3). $|2-x| = 17$ 5). $||2x-1|-5| = 6$
2). $|5x+12| = 8$ 4). $||x-2|-3| = 7$ 6). $|4-|3-x|| = 2$

16. Решить уравнение.

1). $|2x-5|-4x = 3$ 5). $|2-x|-|6+x| = 12$
2). $|x-2|-2 = x$ 6). $|2x-1|+|3x+6| = 15$
3). $|4x-3|+3x = 5$ 7). $|3x-2|+|3x-4| = 2$
4). $|4x+5|+|x-1| = 16$ 8). $|2-x|+|5+x| = 7$

17. Решить уравнение.

1). $||x-2|-3| = |2-x|$ 3). $||3-x|-2| = |x+1|$
2). $|4-|2x+3|| = |3-2x|$ 4). $||5+3x|-11| = |6-3x|$

18. Решить уравнение.

1). $|x^2-3x-1| = |3x^2+5x+7|$ 2). $|6x^2-6x-14| = |5x^2-5x-8|$

19. Решить уравнение.

1). $x^2-2|x+3|-9 = 0$ 2). $4x^2+2|6x+5|-17 = 0$
4). $x^2+4|x+1|-1 = 0$ 3). $x^2+10|x|-11 = 0$

20. Решить неравенство.

1). $|2x-5| < 3$ 2). $|3-4x| < 7$ 3). $|2+x| > 1$ 4). $|6-x| > 3$

21. Решить неравенство.

1). $|2-3x| < x$ 2). $|1+2x| > x-1$
3). $|1+x|+|2-x| < 3$ 4). $|x-2|+|3-x| < 5$
5). $|x^2-6x| \geqslant |x^2+18x|$ 6). $|x^2+3x+1| \geqslant |x^2+5x-11|$
7). $\dfrac{x-2}{|x-3|-2} \leqslant 0$ 8). $\dfrac{x+3}{1-|x-1|} \geqslant 0$, при $x < 0.5$

22. Вычислить

1). $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}$

2). $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{23}+\sqrt{25}}$

3). $\dfrac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{12}}+\dfrac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{15}}+\dfrac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{18}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{141}+\sqrt{144}}$

23. Упростить

1). $\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ 4). $\sqrt{8+2\sqrt{15}}+\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

2). $\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}$ 5). $\sqrt{9+2\sqrt{18}}-\sqrt{9-2\sqrt{18}}$

3). $\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 6). $\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}$

24. Вычислить

1). $\sqrt[10]{\frac{1}{2}(19+6\sqrt{10})}\cdot\sqrt[5]{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}$

2). $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}\cdot\dfrac{\sqrt[12]{(9-4\sqrt{5})^3}}{\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}}$

25. Упростить

1). $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+\frac{2a^2}{\sqrt{a}}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\dfrac{3\sqrt{b^2-2b\sqrt{ab}+ab}}{a-b}$, при $a>b$

2). $\dfrac{a^{\frac{7}{3}}-2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}-ab^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b}:a^{\frac{1}{3}}$

3). $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

26. Упростить.

1). $\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{4x^2+20x+25}$, при $x\in(-1;1)$

2). $\sqrt{25x^2-30x+9}+\sqrt{9x^2+12x+4}$, при $x<-1$

27. Решить уравнение:

1). $\sqrt{x^2-6x}(x^2-8x+15)=0$ 2). $\sqrt{x^2+x-6}(x^2+6x+8)=0$

3). $\sqrt{2x^2-3x-14}(x^2-2x)=0$ 4). $\sqrt{3x^2-5x-2}(x^2+6x-7)=0$

28. Решить уравнение:

1). $\sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}}+\sqrt{x-1-4\sqrt{x-5}}=5$

2). $\sqrt{8+x-6\sqrt{x-1}}+\sqrt{8+x+6\sqrt{x-1}}=16$

3). $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}+\sqrt{2+x+4\sqrt{x-2}}=6$

4). $\sqrt{x+12-6\sqrt{x+3}}+\sqrt{x+28-10\sqrt{x+3}}=2$

29. Решить уравнение:

1). $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}=\sqrt{x^2+2}$
2). $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2+5}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+8}$
3). $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}$
4). $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=6-\sqrt{x+1}$
5). $\sqrt{(x^2+x)^2+9}+\sqrt{(x^2+x)^2+16}=12-\sqrt{(x^2+x)^2+25}$
6). $\sqrt{x^2-6x+10}+\sqrt{x^2-6x+13}=7-\sqrt{x^2-6x+25}$

30. Решить уравнение:

1). $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=1$
2). $\sqrt{5x+1}=6-\sqrt{x+1}$
3). $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+1}=0$
4). $\sqrt{3x+10}-\sqrt{x+11}=1$
5). $\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x-4}$
6). $\sqrt{x+7}-\sqrt{x+2}=\sqrt{3-x}$

31. Решить неравенство:

1). $\dfrac{1}{\sqrt{x-8}-\sqrt{12-x}}\leqslant 0$
2). $\dfrac{1}{\sqrt{2x-5}-\sqrt{15-3x}}\geqslant 0$
3). $\dfrac{1}{\sqrt{x-4}-\sqrt{12-x}}>0$
4). $\dfrac{x-12}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{x+2}}<0$
5). $\dfrac{14-x}{\sqrt{x-6}+\sqrt{2x-9}}>0$
6). $\dfrac{3x-2}{\sqrt{-3x+4}+\sqrt{5x+6}}\geqslant 0$

32. Решить неравенство:

1). $\sqrt{x^2-6x+8}\leqslant x+6$
2). $\sqrt{4x+9}\leqslant x-3$
3). $\sqrt{x+1}<x-1$
4). $\sqrt{-4x-7}<2x+5$
5). $\sqrt{x+4}\geqslant 3x-2$
6). $\sqrt{1-6x}>x-3$
7). $\sqrt{x^2+5x+6}>x+1$
8). $\sqrt{4x+17}>x+3$

33. Решить неравенство:

1). $\dfrac{\sqrt{x^2-6x+8}}{x^2-8x+15}\leqslant 0$
2). $\dfrac{\sqrt{2x^2-7x+5}}{x^2-5x+6}\leqslant 0$
3). $\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{4-x^2}\geqslant 0$
4). $\sqrt{x^2-12x+32}\cdot(x^2-4x-5)\leqslant 0$
5). $\sqrt{x^2-x-6}\cdot(x^2-7x+10)\leqslant 0$
6). $\sqrt{3x-x^2+18}\cdot(x^2-8x)\geqslant 0$

34. Решить неравенство:

1). $\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x+2}\geqslant 0$
2). $\dfrac{\sqrt{2x+5}-1}{x-3}\geqslant 0$
3). $\dfrac{4-\sqrt{x-1}}{x-2}\leqslant 0$
4). $\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{4-x}\geqslant 0$
5). $\dfrac{x(x-3)}{\sqrt{x-1}-2}\geqslant 0$
6). $\dfrac{(x-1)(x-2)^2}{\sqrt{x+3}-4}\geqslant 0$
7). $\dfrac{(x+2)(x-4)^2(\sqrt{x+3}-2)}{\sqrt{x+6}-3}\leqslant 0$
8). $\dfrac{(\sqrt{x-1}-3)(\sqrt{x-2}-2)}{\sqrt{x-3}-1}\leqslant 0$

35. Решить неравенство:

1). $\dfrac{\sqrt{3x+1}}{x} \leqslant 2$ 2). $\dfrac{\sqrt{2x+2}}{x} \leqslant 2$ 3). $\dfrac{\sqrt{7x+8}}{x} \leqslant 1$ 4). $\dfrac{\sqrt{3x+2}}{x} \leqslant 3$

Ответы.

1. 1). 27 2). 36.
2. 1). $(a^2-a+2)(a^2+a+2)$ 2). $(a^2-3a+3)(a^2+3a+3)$
   3). $(a^2-2a+5)(a^2+2a+5)$ 4). $(2a^2-2\sqrt{5}a+5)(2a^2+2\sqrt{5}a+5)$
   5). $(a-3)(a-2)(a+2)(a+3)$ 6). $(a-2)(a-1)(a+1)(a+2)$.
3. 1). $-21, 23$ 2). $\frac{8}{27}$ 3). $-\frac{3}{7}$ 4). 4 5). -51 6). 4
   7). $x^2-11x+3=0$ 8). $x^2-x-9=0$.
4. 1). $-5, 2$ 2). $2, 3$ 3). $-2, \frac{1}{2}$ 4). $\frac{3}{2}, 2$.
   5). 3 6). 2 7). $\varnothing$.
5. 1). $-4, 2, 3$ 2). $-5, 2, 4$ 3). $-3, -2, 1$ 4). ± 3.
6. 1). 3 2). $\frac{15}{8}$.
7. 1). $\frac{1}{2}, 2, \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 2). $-\frac{1}{2}, 2, \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.
8. 1). $\pm 4, \pm 2\sqrt{3}$ 2). $2, \frac{17}{7}, 5, 6$ 3). $-4, -2, \frac{2}{7}, 1$.
9. 1). $(2;-3)$ 2). $(C; 2C-10), \forall C \in R$ 3). $\varnothing$
   4). $(2;1;-1)$ 5). $(1;-2;3)$.
10. 1). $\{(2;-1), (-\frac{4}{3}; -\frac{8}{3})\}$ 2). $\{(-1;3), (-2;4)\}$ 3). $\{(3;1), (-3,-1)\}$
    4). $\{(6;-2), (-\frac{30}{61}; -\frac{1}{61})\}$ 5). $(-2;1)$ 6). $\{(\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{3}), (\mp\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{3})\}$
    7). $\{(5;1), (-\frac{30}{7}; \frac{42}{55})\}$ 8). $\{(\pm 1; \pm 3), (\mp\frac{16}{5}; \pm\frac{8}{5})\}$
    9). $\{(\pm 2; \pm 1), (\pm 2; \mp 2)\}$ 10). $\{(\pm 2; \mp 2), (\pm\frac{2}{3}; \pm 1)\}$
    11). $\{(\pm 4; \pm 2), (\pm 4; \mp 4)\}$ 12). $\{(\pm 3; \pm 3), (\pm 4; \pm 2)\}$.
11. 1). $0, 6, 2(1\pm\sqrt{2})$ 2). $0, 4, 1\pm\sqrt{3}$ 3). $-3, 0, -2\pm\sqrt{2}$
    4). $-1, 0, (-5\pm\sqrt{5})/6$.
12. 1). $(1;5)\cup[\frac{33}{5};+\infty)$ 2). $(-2;1)\cup(4;+\infty)$ 3). $(-1;0)\cup(2;3)$
    4) $(-4;-2)\cup(1;3)$ 5). $[-3;-2)\cup[0;1)\cup[4;+\infty)$
    6). $[-3;-2)\cup(-1;2]\cup[4;5)$ 7). $[-1;0)\cup[2;3]$ 8). $(-\infty;-3)\cup[2;4]$
    9). $(-3;2)\cup(2;5)$ 10). $(-5;3)\cup(3;4]$ 11). $(-\infty;-1]\cup[0;3)\cup(3;4]$
    12). $(-\infty;-2)\cup\{1\}\cup[5;6)$ 13). $(-5;-3]\cup\{-2\}\cup(1;+\infty)$
    14). $(-\infty;-5)\cup\{-3\}\cup(0;4]\cup(6;+\infty)$.
13. 1). $(-\frac{3}{4};0)\cup\{\frac{2}{3}\}$ 2). $(-\frac{7}{3};0)$
    3). $\{-\frac{3}{2}\}\cup(0;\frac{2}{5})$ 4). $\{\frac{2}{5}\}\cup(\frac{5}{7};\frac{3}{2}]$
    5). $(0;\frac{3}{2}]$ 6). $(-\infty;-\frac{2}{3})\cup(-\frac{2}{3};0)\cup[\frac{5}{2};+\infty)$.
14. 1). $(-3;-2]\cup[0;1)$ 2). $[-4;-1]\cup[3;6]$ 3). $[-5;-2)\cup\{-1\}$
    4). $(-3;-2)\cup(2;7)$ 5). $(-2;3)$ 6). $[-7;3)\cup\{8\}$.

15. 1). $-4, 9$ 2). $-4, -\frac{4}{5}$ 3). $-15, 19$ 4). $-8, 12$ 5). $-5, 6$
6). $-3, 1, 5, 9.$
16. 1). $\frac{1}{3}$ 2). 0 3). $-2, \frac{8}{7}$ 4). $-4, 2\frac{2}{5}$ 5). $\varnothing$ 6). $-4, 2$
7). $[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}]$ 8). $[-5; 2]$.
17. 1). $0.5, 3.5$ 2).1 3). 0 4). $[-\frac{5}{3}; +\infty)$.
18. 1). -2 2). $-2, -1, 2, 3.$
19. 1). $-3, 5$ 2). $-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ 3). ± 1 4). $-1.$
20. 1). $(1; 4)$ 2). $(-1; \frac{5}{2})$ 3). $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$
4). $(-\infty; 3) \cup (9; +\infty)$.
21. 1). $(\frac{1}{2}; 1)$ 2). $(-\infty; +\infty)$ 3). $\varnothing$ 4). $(0; 5)$
5). $(-\infty; -6] \cup \{0\}$ 6). $(-\infty; -5] \cup [1; 6]$
7). $(-\infty; 1] \cup [2; 5)$ 8). $(-\infty; -3] \cup (0; 0.5)$
22. 1). 2 2). 2 3). 3.
23. 1). $2\sqrt{2}$ 2). $2\sqrt{3}$ 3). $2\sqrt{3} - 3$ 4). $2\sqrt{5}$ 5). $2\sqrt{3}$. 6). -3.
24. 1). -1 2). -1.
25. 1). 3 2). $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ 3). 1.
26. 1). 8 2). $1 - 8x$.
27. 1). $0, 6$ 2). $-4, -3, 2$ 3). $-2, 3.5$ 4). $-7, -1/3, 2.$
28. 1). $5, 30$ 2). 65 3). 11 4). $[6; 22]$.
30. 1). 2 2). 3 3). 5 4). 5 5). 5 6). ± 2.
29. 1). $\varnothing$ 2). $\varnothing$ 3). $\varnothing$ 4). 0 5). $0, -1$ 6). 3.
31. 1). $[8; 10)$ 2). $(4; 5]$ 3). $(8; 12]$ 4). $[\frac{1}{4}; 12)$ 5). $[6; 14)$
6). $[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}]$.
32. 1). $[-\frac{14}{9}; 2] \cup [4; +\infty)$ 2). $[10; +\infty)$ 3). $(3; +\infty)$ 4). $[-4\frac{1}{4}; 2)$
5). $(-2; -\frac{7}{4}]$ 6). $(-\infty; \frac{1}{6}]$ 7). $(-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$8). $[-\frac{19}{15}; +\infty)$.
33. 1). $\{2\} \cup [4; 5)$ 2). $\{1\} \cup [\frac{5}{2}; 3)$ 3). $(-2; 1] \cup \{3\}$ 4). $[-1; 4] \cup \{8\}$
5). $\{-2\} \cup [3; 5]$ 6). $[-3; 0] \cup \{6\}$.
34. 1). $[-4; -2) \cup [5; +\infty)$ 2). $[-2.5; -2] \cup (3; +\infty)$ 3). $[1; 2) \cup [17; +\infty)$
4). $[-3; 1] \cup (4; +\infty)$ 5). $[1; 3] \cup (5; +\infty)$ 6). $[-3; 1] \cup \{2\} \cup (13; +\infty)$
7). $[-3; -2] \cup [1; 3) \cup \{4\}$ 8). $[3; 4) \cup [6; 10]$.
35. 1). $[-\frac{1}{3}; 0) \cup [1; +\infty)$ 2). $[-1; 0) \cup [1; +\infty)$ 3). $[-\frac{8}{7}; 0) \cup [8; +\infty)$
4). $[-\frac{2}{3}; 0) \cup [\frac{2}{3}; +\infty)$.

Глава 2

Текстовые задачи.

2.1 Проценты.

Всякое неотрицательное число A можно выразить в долях положительного числа B. Для этого надо A разделить на B. Отношение A/B называется *относительным значением* числа A от B. Например, пусть $A = 2, B = 8$, тогда $\varepsilon = A/B = 2/8 = 0.25$ (ε читается как «эпсилон»). Т. о. относительное значение числа A от B равно 0.25.

Кроме относительного значения используют процент числа, который получается умножением относительного значения на 100%. Так, для чисел A и B: $p = \varepsilon \cdot 100\% = A/B \cdot 100\%$. В частности при $A = 2$ и $B = 8$ получим $p = 0.25 \cdot 100\% = 25\%$, то есть число A составляет 25 процентов числа B.

Пример 47. Сколько процентов составляет число 120 от числа 300?

Решение. Вначале находим относительное значение числа 120 от 300: $\frac{120}{300} = 0.4$, затем процент: $0.4 \cdot 100\% = 40\%$. Ответ: 40%.

Заметим, что если число A равно числу B, то число A составляет 100% числа B, так как в этом случае $A/B \cdot 100\% = 100\%$. Следовательно, любое число всегда составляет 100% самого себя.

Пример 48. На сколько процентов число 60 больше 40?

Решение. Из вопроса следует, что интересуются числом 60 относительно числа 40, поэтому находим относительное значение числа 60 от числа 40: $\frac{60}{40} = 1.5$, после чего находим процент: $1.5 \cdot 100\% = 150\%$. Так как число 40 составляет 100%, то $150\% - 100\% = 50\%$. Ответ: на 50 процентов.

Пример 49. На сколько процентов число 20 меньше числа 25?

Из вопроса видно, что 20 сравнивается с 25, поэтому относительное значение 20 от 25 равно $\frac{20}{25} = \frac{4}{5} = 0.8$ и его процент: $0.8 \cdot 100\% = 80\%$. Таким образом, число 20 отличается от числа 25 на $80\% - 100\% = -20\%$. Ответ: на 20%.

Заметим, что правильнее из числа, процент которого находят, вычитать процент числа, с которым сравнивают. Тогда знак будет указывать на то, что искомое больше или меньше числа, с которым его сравнивают. В нашем примере разность «–20%» показывает, что число 20 на 20 процентов меньше числа 25.

Если известен процент числа, то нетрудно определить его относительное значение. Для этого достаточно произвести обратную операцию. Так как процент числа получен умножением относительного значения на 100%, то относительное значение найдём делением процента на 100%. Так, пусть некоторое A число составляет 125% некоторого числа B. Это означает, что относительное значение числа A от B равно $\frac{125\%}{100\%} = 1.25$. Если число составляет 140%, его относительное значение равно 1.4 и т. д.

Ряд задач на простые проценты удобнее решать не по определению (как до этого), а составлением пропорций. Пусть, например, число A составляет $p\%$ от числа B, а число C составляет $q\%$ от числа B. Тогда справедливо равенство: $\dfrac{A}{C} = \dfrac{p\%}{q\%}$, составляющее суть *метода пропорций*. В самом деле, пусть $p\% = A/B \cdot 100\%$ и $q\% = C/B \cdot 100\%$. Тогда $\dfrac{p\%}{q\%} = \dfrac{A/B \cdot 100\%}{C/B \cdot 100\%} = \dfrac{A}{C}$.

Пример 50. Стоимость куртки за год увеличилась на 20% и стала составлять 240 рублей. Сколько рублей стоила куртка до подорожания?

Решение. Введём обозначения:

x руб.	–	100%	первоначальная стоимость
240 руб.	–	120%	конечная стоимость.

Составляем пропорцию: $\dfrac{x}{240} = \dfrac{100\%}{120\%}$, откуда $x = \dfrac{240 \cdot 100\%}{120\%} = 200$.

Ответ: 200 рублей.

Пример 51. В первый год на покупку удобрений двух видов выделено 200 тыс. руб., при этом 60% от этой суммы – на покупку удобрения первого вида. Во второй год на покупку удобрения двух видов было выделено 250 тыс. руб., при этом на покупку удобрения первого вида выделили 80% от годовой суммы. Сколько процентов составляет выделенная сумма на покупку удобрения второго вида во втором году от суммы, выделенной на покупку удобрения того вида в первом году?

Решение. Из условия следует, что в первый год на удобрения второго вида было израсходовано 40%, а во втором году – 20% от всех выделенных средств, что может быть записано следующим образом:

$$\text{I год: 200 тыс. руб.} = \begin{cases} 0.6 \cdot 200 - \text{тыс. руб. удобрения 1 вида,} \\ 0.4 \cdot 200 - \text{тыс. руб. удобрения 2 вида.} \end{cases}$$

$$\text{II год: 250 тыс. руб.} = \begin{cases} 0.8 \cdot 250 - \text{тыс. руб. удобрения 1 вида,} \\ 0.2 \cdot 250 - \text{тыс. руб. удобрения 2 вида.} \end{cases}$$

Таким образом выделенная сумма во втором году по отношению к первому году составляет $\frac{0.2 \cdot 250}{0.4 \cdot 200} \cdot 100\% = 62.5\%$. Ответ: 62.5%.

Рассмотрим такую задачу. В банк сделан вклад 100 рублей под 10% годовых. Следовательно, по истечении года банк начислит на вклад 10 рублей. В результате у вкладчика на начало второго года на счёте будет 110 рублей. Допустим договор пролонгирован (продлён) на прежних условиях и на тот же срок. Тогда по истечении второго года вкладчик получит: 100 рублей – свой первоначальный вклад, 10 рублей – проценты по вкладу за первый год, 10 рублей – проценты на первоначальный вклад за второй год, и 1 рубль – проценты за второй год на процентные деньги – 10 рублей, полученные за первый год. Итого: 100 руб. + 10 руб. + 10 руб. + 1 руб.= 121 руб. Таким образом, за второй год процентные деньги на 1 рубль больше, чем за первый год. Это связано с тем, что 1% процент от первоначальной суммы составлял 10 рублей, а 1 процент от суммы вклада за 2 год – 11 руб., то есть вклад «потяжелел», и начисляемые на него проценты стали более весомы.

Пример 52. Стоимость изделия в первый год увеличилась на 20%, а во второй год на 20% упала. На сколько процентов изменилась стоимость изделия за два года?

Для решения задачи введём обозначения:

x_0 – исходная стоимость изделия (на начало первого года),

x_1 – стоимость изделия в конце первого года,

x_2 – стоимость изделия в конце второго года.

Данные изменение стоимости изделия запишем так

$$x_0 \xrightarrow{\nearrow 20\%} x_1 \xrightarrow{\searrow 20\%} x_2.$$

Из условия следует, что стоимость изделия в конце первого года составляет 120% от исходной стоимости изделия, а стоимость изделия на конец второго года – 80% от стоимости изделия в конце первого года.

От стоимости изделия в процентах перейдём к стоимости изделия в относительных единицах. Так как по условию $x_1/x_0 = 120\%/100\% = 1.2$, то $x_1 = 1.2x_0$. Аналогично $x_2 = 0.8x_1$.

Тогда стоимость изделия во втором году по отношению к началу первого года составляет

$$\frac{x_2}{x_0} \cdot 100\% = \frac{0.8x_1}{x_0} \cdot 100\% = \frac{0.8 \cdot 1.2x_0}{x_0} \cdot 100\% = 96\%.$$

Таким образом, за два года стоимость изделия изменилась на $96\% - 100\% = -4\%$. Ответ: уменьшилась на 4%.

Пример 53. Свежие грибы содержат 80 процентов воды, а сушёные – 10 процентов. Сколько кг сухих грибов можно получить из 36 кг свежих?

Решение. В данной задаче имеется неизменная часть – это сухой остаток грибов, поэтому будем решать, основываясь на нахождении этого остатка до сушки и после.

Обозначим через x вес сухих грибов и дадим схематическое представление задачи $\rightarrow$

Сухой остаток грибов до сушки равен $0.2 \cdot 36$ кг, а после сушки – $0.9 \cdot x$ кг, поэтому $0.2 \cdot 36$ кг $= 0.9 \cdot x$ кг, откуда $x = \dfrac{0.2 \cdot 36}{0.9}$ кг $= 8$. Ответ: 8 кг.

Пример 54. Стоимость изделия в первый год увеличилась на некоторую величину, а во второй год увеличилась на вдвое большую. В результате за два года стоимость изделия увеличилась на 60%. На сколько процентов изменялась стоимость изделия каждый год?

Решение. Пусть x_0, x_1, x_2 – стоимости изделия на начало первого года, на конец первого года и на конец второго года соответственно, а y – та величина, на которую эта стоимость увеличилась в первый год. Как следует из условия стоимость изделия за два года увеличилась в 1.6 раза. Тогда изменение стоимости изделия во времени запишем следующим образом:

$$x_0 \xrightarrow{\nearrow y} x_1 \xrightarrow{\nearrow 2y} x_2. \qquad \begin{cases} x_1 = x_0 + y \\ x_2 = x_1 + 2y \\ x_2 = 1.6x_0 \end{cases}$$

откуда $1.6x_0 = x_1 + 2y = x_0 + 3y, \qquad y = 0.2x_0$.

Следовательно, в первый год стоимость изделия составляет

$$\frac{x_1}{x_0} \cdot 100\% = \frac{x_0 + y}{x_0} \cdot 100\% = \frac{x_0 + 0.2x_0}{x_0} \cdot 100\% = 120\%.$$

от стоимости изделия на начало первого года.

Рост стоимости изделия в первом году равна: $120\% - 100\% = 20\%$.

Аналогично стоимость изделия во втором году составляет

$$\frac{x_2}{x_1} \cdot 100\% = \frac{1.6x_0}{x_0 + y} \cdot 100\% = \frac{1.6x_0}{x_0 + 0.2x_0} \cdot 100\% = \frac{160\%}{1.2} = 133\frac{1}{3}\%.$$

от стоимости изделия на конец первого года.

Тогда рост стоимости во втором году будет: $133\frac{1}{3} - 100\% = 33\frac{1}{3}\%$. Ответ: 20% и $33\frac{1}{3}\%$.

Пример 55. 800 грамм 5% раствора йода смешали с 700 граммами 20% раствора йода. Какой процент йода в полученной смеси?

Решение. Понятно, что вес смеси равен суммарному весу компонент, то есть 1500 граммам. Количество йода в полученном растворе равно количеству йода исходных компонент. Обозначая неизвестный процент смеси через x, дадим схематическое условие задачи, по которому составим уравнение:

$$800 \text{ грамм } \cdot 0.05 + 700 \text{ грамм } \cdot 0.2 = 1500 \text{ грамм } \cdot x\%/100\%.$$

Откуда $x = (8 \cdot 5 + 7 \cdot 20)/15 = 12$. Ответ: 12%.

Пример 56. Высоту треугольника, площадью 24 см^2, увеличили на 25%. На сколько процентов необходимо уменьшить основание этого треугольника, чтобы его площадь осталась прежней?

Решение. По определению площадь S треугольника равна: $S = \frac{1}{2}ah$, где a – основание и h – его высота. Обозначая исходные значения основания и высоты как a_0 и h_0, а изменённые как a_1 и h_1, и, учитывая, что $h_1 = 1.25h_0$, получим: $S = \frac{1}{2}a_0h_0, \quad S = \frac{1}{2}a_1 \cdot 1.25h_0$. Приравниваем правые части: $a_1 \cdot 1.25h_0 = a_0h_0$. Откуда $a_1/a_0 = 1/1.25 = 4/5 = 0.8$. Ответ: на 20%.

Пример 57. Стоимость изделия во второй год возросла на такое же число процентов, сколько стоило изделие в рублях и стало стоить 144 рубля. Сколько стоило изделие до подорожания?

Решение. Пусть x – исходная стоимость изделия, а y – процент, на который эта стоимость повысилась. Тогда изменение стоимости равно:

$(x/100\%)\cdot y\%$, так как величина $\dfrac{x}{100\%}$ показывает, сколько рублей составляет один процент. С другой стороны, изменение стоимости в процентах по условию равно исходной стоимости в рублях, таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} x+\dfrac{x}{100\%}\cdot y\% = 144 \\ x=y. \end{cases}$$

Ответ: 80 рублей.

Пример 58. В лесу количество берёз на 20% больше количества сосен, а количество елей на 50% меньше количества осин, при этом количество осин в 1.5 раза меньше количества берёз. На сколько процентов елей меньше сосен?

Решение. Введём обозначения:

Б – количество берёз; С – количество сосен;

Е – количество елей; Ос – количество осин.

Тогда, в соответствии с условием: Б=1.2С, Е=0.5$\cdot$ Ос и Ос=Б/1.5.

Следовательно

1. $\dfrac{\text{Е}}{\text{С}}=\dfrac{0.5\text{Ос}}{\text{Б}/1.2}=\dfrac{1.2\cdot 0.5\text{Ос}}{\text{Б}}=\dfrac{1.2\cdot 0.5\text{Б}}{1.5\text{Б}}=0.4.$

2. $0.4\cdot 100\%=40\%$, 3. $40\%-100\%=-60\%$.

Ответ: на 60 %.

2.2 Работа.

Обозначим работу как A, а время через t. Производительностью труда – q называется отношение работы на время, в течении которого выполнялась данная работа. Таким образом, $q=\dfrac{A}{t}$. В том случае, если известна производительность труда, то $A=q\cdot t$ и $t=A/q$.

Нередко для решения задачи нет необходимости знать абсолютное значение работы и достаточно лишь её относительное значение. В этом случае всю работу принимают за единицу. Например, при покраски 8 м^2 стены общей площадью 32 м^2 достаточно сказать, что покрашено 25% всей площади. Тогда, так как известна общая площадь, то покрашено: $32\text{м}^2\cdot 0.25=8\text{м}^2$.

Пример 59. Двое рабочих за 4 часа могут выполнить всю работу, а один – за 6 часов. За какое время может выполнить всю работу другой рабочий?

Решение. Пусть второй рабочий может выполнить всю работу за

t часов. Тогда его производительность равна $\frac{1}{t}$. Производительность труда первого рабочего равна $\frac{1}{6}$. Используя введённые обозначения и условие, получим уравнение $\frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{t} \cdot 4 = 1$, $\quad \frac{1}{t} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$. Ответ: 12 часов.

Если работа выполняется одновременно несколькими рабочими или механизмами, то общая производительность складывается. В самом деле, пусть q_1 и q_2 – отдельные производительности труда и $q_{\text{общ.}}$ – общая производительность труда. Тогда за время совместной работы $t_{\text{общ.}}$ будет выполнена работа $A = q_1 \cdot t_{\text{общ.}} + q_2 \cdot t_{\text{общ.}}$. С другой стороны, $A = t_{\text{общ.}} q_{\text{общ.}}$. Откуда $q_{\text{общ.}} = q_1 + q_2$.

Пример 60. Пять рабочих, работая с одинаковой производительностью труда, за 4 часа могут выполнить 80% всей работы. За какое время 0.4 всей работы выполнят 8 рабочих?

Решение. Переведём объём выполняемой работы из процентов в относительные величины: $80\% \to \frac{80\%}{100\%} = 0.8$ и введём обозначения:

q – производительность труда одного рабочего,

t – время выполнения 0.4 работы восьми рабочими, тогда

$\begin{cases} 5 \cdot q \cdot 4 = 0.8 \\ 8 \cdot q \cdot t = 0.4. \end{cases}$ Разделим нижнюю строку на верхнюю: $\frac{8 \cdot q \cdot t}{5 \cdot q \cdot 4} = \frac{0.4}{0.8}$.

Ответ: 1.25 часа.

Пример 61. Двое рабочих за 6 часов могут выполнить всю работу, а один – на 5 часов быстрее другого. За какое время может выполнить всю работу каждый рабочий?

Решение. Пусть один первый рабочий может выполнить всю работу за t_1 часа, а один второй – за t_2 часа. Тогда производительности труда первого и второго рабочих равны $1/t_1$ и $1/t_2$. Используя введённые обозначения, запишем условие в виде системы:

$$\begin{cases} 6 \cdot \dfrac{1}{t_1} + 6 \cdot \dfrac{1}{t_2} = 1 \\ t_2 - t_1 = 5. \end{cases} \text{или} \begin{cases} \dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} = \dfrac{1}{6} \\ t_2 = t_1 + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} t_2 = t_1 + 5 \\ \dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_1 + 5} = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Откуда $t_1 = 10$ или $t_1 = -3$. Отбрасывая решение с отрицательным значением времени, находим $t_1 = 10$ и $t_2 = 15$. Ответ: 10 и 15 часов.

Пример 62. Четыре трубы разного диаметра заполняют бассейн за 4 часа, а 1, 2, и 3 трубы – за 6 часов. За какое время заполнят бассейн

2 и 4 трубы, если 1, 3 и 4 трубы – заполняют бассейн за 8 часов.

Решение. Пусть q_i – эффективность заполнения i-ой трубы, тогда:

$$\begin{cases} q_1 & +q_2 & +q_3 & +q_4 & = & \dfrac{1}{4} \\ q_1 & +q_2 & +q_3 & & = & \dfrac{1}{6} \\ q_1 & & +q_3 & +q_4 & = & \dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

(При записи системы уравнений полезно руководствоваться правилом: одинаковые неизвестные писать в своём столбце.)

Условие задачи таково, что количество неизвестных больше количества уравнений, поэтому нет возможности найти эффективность каждой трубы в отдельности, после чего можно было бы найти суммарную эффективность 2 и 4 труб, поэтому необходим специальный приём.

Внимательно взглянув на заданную систему линейных уравнений, видим, что сумма $q_1 + q_2$ находится вычитанием из удвоенной первой строки второй и третьей строк (первую строку, в которой имеются все эффективности, необходимо умножить на такое число, сколько будет повторяющихся «ненужных» переменных в сумме остальных строк – в данном случае q_1 и q_3). В результате получим:

$2(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - (q_1 + q_2 + q_3) - (q_1 + q_3 + q_4) = 2 \cdot \frac{1}{4} - (\frac{1}{8} + \frac{1}{6})$.

Откуда $\dfrac{1}{t} = q_2 + q_4 = \dfrac{12 - 3 - 4}{24} = \dfrac{5}{24}$. Ответ: $4\frac{4}{5}$ часа.

Пример 63. Два рабочих могут выполнить всё работу за 15 часов. Если первый выполнит 1/9 всей работы, а затем второй всю оставшуюся часть, то на это уйдёт 25 часов. За какое время может выполнить всю работу каждый рабочий?

Решение. Пусть x – производительность первого рабочего,

y – производительность второго рабочего.

Тогда первый рабочий за время $t = 15$ часов выполнит работу $A_1 = t \cdot x = 15x$, а второй $A_2 = t \cdot y = 15y$. Так как была выполнена вся работа, то $15x + 15y = 1$ или $x + y = \dfrac{1}{15}$.

Если первый рабочий выполнит 1/9 от всей работы, то он затратит время $(1/9)/x$ часа. Второй рабочий – $(8/9)/y$ часов. По условию общее время на выполнение всей работы – 25 часов, поэтому $\dfrac{1}{9x} + \dfrac{8}{9y} =$

25. Следовательно $\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{15} \\ \dfrac{1}{9x}+\dfrac{8}{9y}=25. \end{cases}$ или $\begin{cases} x=\dfrac{1}{15}-y \\ \dfrac{y+8(\frac{1}{15}-y)}{9y(\frac{1}{15}-y)}=25. \end{cases}$ Откуда $y_1=\dfrac{2}{45}, x_1=\dfrac{1}{45}$ или $y_2=\dfrac{4}{75}, x_2=\dfrac{1}{45}$. Следовательно имеется два решения: либо $t_1=1/x_1=45$ и $t_2=1/y_1=22.5$ либо $t_1=1/x_2=75$ и $t_2=1/y_2=18.75$. Ответ: 45 и 22.5 часа или 75 и 18.75 часа.

Пример 64. За договорный период рабочий может сделать 872 детали. Оказалось, что первые 3 дня он перевыполнял норму на 2 детали, следующие 6 дней он перевыполнял норму на 12 деталей, а остальные дни он делал на одну деталь меньше нормы. В результате на один день раньше срока он сделал 852 детали. Какова обычная производительность труда рабочего за день?

Решение. Пусть q – обычная производительность труда рабочего и t – время договорного периода, тогда

$$\begin{cases} qt=832 \\ (q+2)\cdot 3+(q+12)\cdot 6+(q-1)(t-1-(3+6))=852. \end{cases}$$

Откуда $q=52$ или $q=16$. Ответ: 16 или 52 детали в день.

2.3 Признаки делимости чисел.

При решении некоторых задач полезно помнить признаки делимости:

– целое число, оканчивающееся на 0 или 5 делится нацело на 5;

– целое число, оканчивающееся на чётное число делится нацело на 2;

– если сумма цифр целого числа делится нацело на 3, то и число также делится на 3 без остатка;

– если сумма цифр целого числа делится нацело на 9, то и число также делится на 9 без остатка.

Пример 65. Произведение четырёх последовательных нечётных чисел равно 19305. Найти эти числа.

Решение. Так как по признакам делимости заданное число делится на 9 и на 5, то: $(19305:5):9=3861:9=429$. Полученное число делится на 3, тогда $429:3=143$. Пока получено: $19305=3\cdot 5\cdot 9\cdot 143$. Возможны варианты: $3\cdot 5\cdot 7\cdot 9$, но $7\neq 143$. Либо $9\cdot 11\cdot 13\cdot 15$, что верно, так как $143:11=13$. Ответ: 9, 11, 13, 15.

При нахождении общего знаменателя двух чисел и в некоторых других задачах необходимо находить наименьшее общее кратное (НОК) или наибольший общий делитель (НОД).

Вспомним, что НОК *чисел a и b – это такое наименьшее натуральное число, которое делится нацело как на число a, так и на число b.*

При нахождении как НОК(a, b), так и НОД(a, b), необходимо разложить числа a и b на простые сомножители. Так как НОД – *это число, на которое делятся каждое из чисел a и b*, то он состоит из всех общих делителей чисел a и b в наименьших степенях. Вследствие же того, что НОК – это число которое нацело делится на каждое из чисел a и b, НОК состоит из всех простых делителей чисел a и b в наивысших степенях.

Из определения НОК(a, b) и НОД(a, b) следует формула:

$$\text{НОК}(a, b) \cdot \text{НОД}(a, b) = a \cdot b.$$

Пример 66. Найти НОК и НОД чисел 21560 и 9100.

Решение. $a = 21560 = 10 \cdot 7 \cdot 308 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11.$
$b = 9100 = 100 \cdot 91 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13.$
Следовательно,
НОК$(a, b) = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 = 1401400.$
НОД$(a, b) = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140.$ Ответ: 1401400, 140.

Пример 67. Одно колесо имеет длину окружности обода 1800 см, а другое – 420 см. Через какое минимальное расстояние колёса сделают целое число оборотов?

Решение. Ясно, что соответствующее расстояние в см является НОК чисел 1800 и 420. Найдём его.

$$1800 = 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2, \quad 420 = 2 \cdot 21 \cdot 10 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Откуда НОК$(1800, 420) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 12600.$ Ответ: через 12600 см.

Пример 68. При делении двузначного числа на сумму его цифр получается 7, при умножении этого же числа на разность числа его десятков и единиц получается 189. Что это за число?

Решение. Двузначное число $\overline{nm}$, где n – натуральное, а m – натуральное либо ноль, можно представить в виде: $\overline{nm} = 10n + m$. Тогда условие задачи запишем следующим образом:

$$\begin{cases} (10n + m)/(m + n) = 7 \\ (10n + m)(n - m) = 189. \end{cases}$$

Решая систему методом подстановки, получим $n = \pm 6, m = \pm 3$. Исключаем отрицательное решение. Ответ: 63.

Пример 69. При делении двузначного числа на сумму его цифр получается 4 и в остатке 6, а при делении этого же двузначного числа на разность числа его единиц и десятков получается 23. Что это за число?

Решение. Если двузначное число $\overline{nm}$ делится на $n+m$ с остатком k, то число $\overline{nm}-k$ делится на $m+n$ без остатка. Таким образом приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (10n+m-6)/(m+n)=4 \\ (10n+m)/(m-n)=23. \end{cases}$$

Решаем методом подстановки. Ответ: 46.

2.4 Движение.

Пусть l – расстояние, преодолённое за время t. Тогда средняя скорость $v_{\text{ср.}}$ определяется по формуле: $v_{\text{ср.}} = l/t$. Если известно, что скорость не менялась, то $v_{\text{ср.}} = v$.

В том случае, когда известна скорость, получим: $l = vt$ и $t = l/v$.

Пример 70. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 12 км, в 10 часов вышла лодка. Придя в пункт B, она сразу же повернула обратно и в 14 часов вернулась в пункт A. Найти скорость лодки относительно реки, если скорость течения равна 4 км.

Решение. Пусть $v \geqslant 0$, тогда

$v+4$ – скорость лодки по течению реки,

$v-4$ – скорость лодки против течения реки.

Общее время в пути равно 4 часа, поэтому:

$$\frac{12}{v+4}+\frac{12}{v-4}=4.$$

Решая полученное уравнение, находим два корня: $v_1 = 8$, $v_2 = -2$. Отбрасывая отрицательный корень, приходим к ответу: 8 км/ч.

2.5 Задания.

36. Сколько процентов составляет число 180 от числа 240?

37. Сколько процентов составляет число 504 от числа 420?

38. На сколько процентов число 90 больше 80?

39. На сколько процентов число 52.5 меньше числа 60?

40. Известно, что сумма двух чисел равна 30, а 25% одного равно 50% другого. Что это за числа?

41. В студенческом потоке 75% студентов сдали на оценки 3, 4, 5, при этом число сдавших на отлично относится к числу не сдавших вовсе как 4:3. Сколько студентов учится на потоке, если на хорошо и удовлетворительно сдали 50 студентов?

42. В книжном шкафу стоят книги на русском, испанском и арабском языках. Книги на русском языке составляют 80% всех книг, а количество книги на арабском языке относится к количеству книг на испанском как 2:3. Сколько всего книг в книжном шкафу, если книг на русском и арабском языках 220?

43. Стоимость платья за год уменьшилась на 20% и стала составлять 320 рублей. Сколько стоило платье до подешевления?

44. Прибыль фирмы в первый год увеличилась на 70%, а во второй год увеличилась ещё на 30%. На сколько процентов увеличилась прибыль фирмы за два года?

45. Затраты предприятия в первый год уменьшились на 10%, а во второй год уменьшились ещё на 20%. На сколько процентов уменьшились затраты предприятия за два года?

46. Производительность труда в первый год уменьшилась на 20%, а во второй год увеличилась на 40%. На сколько процентов увеличилась производительность труда за два года?

47. В первый год на покупку удобрений двух видов выделено 300 тыс. руб., при этом 70% от этой суммы на покупку удобрения первого вида. Во второй год на покупку удобрения двух видов было выделено 400 тыс. руб., при этом на покупку удобрения первого вида выделили 60% от годовой суммы. Сколько процентов составляет выделенная сумма на покупку удобрения второго вида в первом году от суммы, выделенной на покупку удобрения второго вида во втором году?

48. Свежие яблоки содержат 60 процентов воды, а мочёные – 80 процентов. Сколько кг мочёных яблок можно получить из 20 кг свежих?

49. В смесь железа и угля, содержащую 95 процентов железа, добавили 240 кг угля. В результате в смеси оказалось 6 процентов угля. Сколько тонн стала весить смесь?

50. На предприятии 45% работающих – мужчины. Приняли на работу 40 мужчин. В результате женщины стали составлять 44% работающих. Сколько человек работало на предприятии?

51. Цена товара в первый год увеличилась на некоторую величину, а во второй год уменьшилась на вдвое большую. В результате за два года

цена товара уменьшилась на 20%. На сколько процентов изменялась стоимость товара каждый год?

52. Эффективность производства в первый год уменьшилась на некоторую величину, а во второй год увеличилась на вдвое большую. В результате за два года эффективность производства увеличилась на 4%. На сколько процентов изменялась эффективность производства каждый год?

53. Объём продаж в первый год уменьшился на некоторую величину, а во второй год уменьшился на втрое большую. В результате за два года объём продаж уменьшился на 80%. На сколько процентов уменьшался объём продаж каждый год?

54. Шести процентный раствор уксусной кислоты смешали с 18% раствором уксусной эссенции. В результате получили 600 граммов 10 процентной уксусной кислоты. Сколько весили компоненты?

55. На автостоянке количество автомашин «Жигули» на 20% больше, чем «Москвичей», а «Audi» на 60% меньше, чем «BMW», при этом количество «Audi» на 40% меньше, чем «Москвичей». На сколько процентов автомашин «BMW» больше, чем «Жигулей»?

56. Высоту пирамиды увеличили на 60%. На сколько процентов необходимо уменьшить площадь её основания, чтобы объём остался прежним ($V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}}h$)?

57. Заработная плата рабочего на фирме возросла на такое же число процентов, сколько была в тысячах рублей и стала равной 5 тысячам 250 рублям. Какая была заработная плата рабочего до повышения?

58. Первый рабочий может выполнить всю работу на 2 часа быстрее второго. После того, как первый рабочий сделал 30% всей работы, а второй – оставшуюся часть, на это ушло 12 часов. Сколько времени необходимо на выполнение всей работы первому и сколько второму рабочим?

59. Снегоуборочный комбайн может убрать весь снег с площадки на 1 час быстрее бригады рабочих. Сделав всего 60% всей работы, комбайн сломался и уборку снега закончила бригада рабочих. На всю работу ушло 5 часов. Сколько времени необходимо на выполнение всей работы комбайну и сколько бригаде рабочих?

60. На усовершенствованной модели комбайна можно убрать урожай с поля на 2 дня быстрее, чем на старой модели. Обработав 30% поля на старой модели, комбайн заменили на усовершенствованный. В результате на уборку 80% поля ушло 13 дней. Сколько дней необходимо на уборку всего поля на старой и на новой моделях комбайна?

61. Две баржи могут перевезти 40% груза за 8 суток, а одна 60% – за 20 суток. За какое время может перевезти половину всего груза другая баржа?

62. Шесть рабочих, работая с одинаковой производительностью труда, за 4 часа могут выполнить 40% всей работы. За какое время 9 рабочих выполнят 90% всей работы?

63. Один канавокопатель может вырыть яму за 9 дней, другой, такую же яму, – за 7 дней. За какое время могут выполнить всю работу оба канавокопателя, работая вместе?

64. Два погрузчика всю работу могут выполнить за 2 часа, а один – на 3 часа быстрее другого. За какое время может выполнить всю работу каждый погрузчик?

65. Комбайн по уборке картофеля работал 5 дней, после чего был заменён другим, который закончил всю работу за 6 дней. За какое время может выполнить всю работу каждый комбайн в отдельности, если первому необходимо на 2 дня меньше второго?

66. Грузовик перевозил груз в течение 8 часов, после чего к нему присоединился другой грузовик. Вместе они закончили всю работу за 4 часа. За какое время может перевезти весь груз каждый грузовик в отдельности, если первому на это необходимо на 5 часов меньше второго?

67. Нефть перевозят три танкера. Известно, что одному первому танкеру потребовалось бы на 6 ходок больше, одному второму – потребовалось бы на 2 ходки больше, а одному третьему – в 4 раза больше ходок, чем всем трём танкерам, работающим вместе. Сколько ходок необходимо сделать всем танкерам, если они будут перевозить нефть одновременно?

68. Три грузчика могут выполнить всю работу за 4 дня. Одному второму грузчику необходимо на 7 дней больше, чем третьему, а одному первому в 2 раза больше времени, чем одному второму. За какое время может выполнить всю работу каждый грузчик в отдельности?

69. За первый месяц две бригады сделали 450 деталей. Во второй месяц производительность труда первой бригады увеличилась на 20%, а второй – на 10%. В результате было сделано на 65 деталей больше. Сколько деталей сделала каждая бригада в первый месяц?

70. В бассейн проведено 5 труб разного диаметра. Известно, что все они могут заполнить бассейн за 4 часа. Если будут открыты краны только 1, 2 и 3 труб, то – за 6 часов, а если открыть краны 3, 4 и 5 труб, то – за 8 часов. За какое время заполнят бассейн 1, 2, 4 и 5 трубы?

71. В бассейн проведено 5 труб разного диаметра. Известно, что все

они могут заполнить бассейн за 6 часов. Если будут открыты краны только 1, 2 и 3 труб, то – за 8 часов, если открыть краны 2, 4 и 5 труб, то – за 12 часов, а если открыть краны 3 и 5 труб, то – за 16 часов. За какое время заполнят бассейн 1 и 4 трубы?

72. В бассейн проведено 6 труб разного диаметра, которые могут заполнить бассейн за 6 часов, а 1, 2, 3 и 6 трубы – за 12 часов. Если будут открыты краны только 2, 3 и 4 труб, то – за 8 часов, а если открыть краны 4, 5 и 6 труб, то – за 24 часа. За какое время заполнят бассейн 1 и 5 трубы?

73. Фирма обязалась построить 2000 дачных домиков. Из-за трудностей с материалами первые 10 дней она строила на 2 домика меньше нормы, следующие 15 дней – на 8 больше, а остальные дни – строго по норме. В результате за 5 дней до срока обязательства были выполнены. Сколько дней работала фирма?

74. Путеукладчик должен был выложить 380 шпал. Однако первые 8 дней выкладывалось на 6 шпал меньше нормы, последующие 4 дня – на 5 шпал больше и наконец остальные дни – на 2 шпалы больше нормы. В результате работа была выполнена на 2 дня раньше срока. Сколько дней работал путеукладчик?

75. Найти НОД и НОК чисел 4200 и 1170.

76. Найти НОД и НОК чисел 7200 и 7560.

77. Найти НОД и НОК чисел 1400 и 240.

78. Известно, что НОК числа 20 и неизвестного равен 60, а их НОД - 10. Найти неизвестное число.

79. Известно, что НОК числа 540 и неизвестного равен 7560, а их НОД - 36. Найти неизвестное число.

80. Известно, что НОК числа 32400 и неизвестного равен 1782000, а их НОД - 1800. Найти неизвестное число.

81. Одно колесо имеет длину окружности обода 450 см, а другое – 1050 см. Через какое минимальное расстояние колёса сделают целое число оборотов?

82. Известно, что произведение четырёх последовательных натуральных чётных чисел равно 13440. Найти эти числа.

83. При делении двузначного числа на сумму его цифр получается 8, при умножении этого же двузначного числа на разность числа его десятков и единиц получается 360. Что это за число?

84. При делении двузначного числа на сумму его цифр получается 8, в остатке 4, а при умножении этого же двузначного числа на разность числа его десятков и единиц получается 644. Что это за число?

85. При делении двузначного числа на сумму его цифр получается 5, в остатке 1, а при умножении этого же двузначного числа на сумму его цифр получается 616. Что это за число?

86. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист со скоростью 20 км/час, а ему навстречу вышел пешеход со скоростью 5 км/час. Через 3 часа они встретились. Найти расстояние между пунктами A и B.

87. Из посёлка в город выехал автомобиль со скоростью 80 км/час. Через 2 часа из города в посёлок выехал трактор со скоростью 25 км/час. Ещё через час они встретились. Найти расстояние между городом и посёлком.

88. Из леса в деревню со скоростью 4 км/час вышел грибник. Через 2 часа из деревни в лес вышел лесник со скоростью 6 км/час. Через 15 минут они встретились. Какое расстояние от леса до деревни?

89. Велосипедист 4/5 пути от пункта A до пункта B ехал со скоростью 20 км/час, а оставшийся путь со скоростью 30 км/час. На всё у него ушло 2 часа 20 минут. Найти расстояние между пунктами A и B.

90. Самолёт 40% пути летел со скоростью 800 км/час, а оставшийся путь – со скоростью 1200 км/час. На всю дорогу у него ушло 3 часа 45 минут. Найти расстояние, которое пролетел самолёт.

91. Лодка 3/4 пути прошла со скоростью 8 км/час, а оставшийся путь она прошла со скоростью 6 км/час. В результате за 1 час 5 минут лодка доплыла до места назначения. Какое расстояние проплыла лодка?

92. Из города в деревню выехал велосипедист со скоростью 25 км/час. Через 55 минут ему навстречу выехал мотоциклист со скоростью 40 км/час. Проехав 2/3 пути, велосипедист встретился с мотоциклистом. Какое расстояние между городом и деревней?

93. Из пункта A в пункт B со скоростью 120 км/час выехал автомобиль. Через 1 час 45 минут из пункта B в A выехал мотоцикл со скоростью 80 км/час. Проехав 1/6 пути мотоцикл встретился с автомобилем. Какое расстояние между пунктами A и B?

94. Из города к морю со скоростью 4 км/час вышел пешеход. Через 15 минут от моря к городу выехал автомобиль со скоростью 60 км/час, который, проехав 9/10 пути, встретил пешехода. Найти расстояние от города до моря.

Ответы.

36. 75% 37. 120% 38. 12.5% 39. 12.5% 40. 20 и 10 41. 120

42. 250 43. 400 руб. 44. 121% 45. 28% 46. 12% 47. 56.25% 48. 40 кг 49. 22.8 т 50. 160 51. 20% и $33\frac{1}{3}$% 52. 4 и $8\frac{1}{3}$% 53. 20% и 75% 54. 400 грамм и 200 грамм 55. 25% 56. 37.5% 57. 5000 рублей 58. 10.6 и 12.6 часов 59. 4.6 и 5.6 часов 60. 15.5 и 17.5 дней 61. 25 суток 62. 6 часов 63. $3\frac{15}{16}$ дня 64. 3 и 6 часов 65. 10 и 12 дней 66. 15 и 20 часов 67. 2 ходки 68. 7, 14, 28 дней 69. 200 и 250 деталей 70. 4.8 часа 71. 16 часов 72. 12 часов 73. 95 дней 74. 36 дней 75. 30 и 163800 76. 360 и 151200 77. 40 и 8400 78. 30 79. 504 80. 99000 81. 3150 см 82. 8,10,12,14 83. 72 84. 92 85. 56. 86. 75 км 87. 265 км 88. 10.5 км 89. 50 км 90. 3750 км 91. 8 км 92. 50 км 93. 360 км 94. 25 км.

Глава 3

Прогрессия.

3.1 Арифметическая прогрессия.

Последовательностью называется перенумерованный набор чисел. Последовательность, обладающая свойством, что каждое последующее число равно сумме предыдущего и некоторой постоянной величины, называется *арифметической прогрессией.* Обозначим члены арифметической прогрессии как a_n (n – номер члена арифметической прогрессии) и запишем их в порядке следования:

$$a_1, \quad a_2 = a_1+d, \quad a_3 = a_2+d = a_1+2d, \quad a_4 = a_3+d = a_1+3d, \ldots, \tag{3.1}$$

где d – постоянная величина, данная в определении. Она называется *разностью арифметической прогрессии.*

Из (3.1) следует *формула общего члена арифметической прогрессии*:

$$a_n = a_1 + d(n-1). \tag{3.2}$$

Можно предложить формулу n-го члена, если известен k-ый член:

$$a_n = a_k + d(n-k). \tag{3.3}$$

Действительно, запишем сумму n членов как сумму с 1-го по n-ый и как сумму с n-го по 1-ый:

$$\begin{array}{c} a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = S_n \\ a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 = S_n. \end{array} \tag{3.4}$$

Заметим, что $\ldots = a_{n-1} + a_2 = (a_n - d) + (a_1 + d) = a_n + a_1$, поэтому, складывая верхнюю и нижнюю строки в (3.4) получим, с одной стороны $2S_n$, а с другой стороны $n(a_1 + a_n)$, таким образом:

сумма первых n членов арифметической прогрессии обозначается как S_n и находится по формуле:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n \quad \text{или} \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n. \tag{3.5}$$

Полезной оказывается формула *среднего члена арифметической прогрессии*:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \quad \text{при } k = 1\text{:} \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \tag{3.6}$$

которая также называется *характеристическим свойством арифметической прогрессии.*

Пример 71. Найти разность арифметической прогрессии, если задан её общий член: $a_n = 3n - 1$.

Решение. По условию общий член арифметической прогрессии определяется формулой: $a_n = 3n - 1$. Находим a_1 и a_2, подставляя в формулу общего члена $n = 1$ и $n = 2$: $a_1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$, $\quad a_2 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$. Откуда $d = a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$. Ответ: 3.

Пример 72. Найти разность арифметической прогрессии, если сумма её первых n членов находится по формуле: $S_n = 3n^2 + 4n$.

Решение. Подставляя $n = 1$ и $n = 2$, находим: $S_1 = 7$ и $S_2 = 20$. Следовательно

$$\begin{cases} a_1 = S_1 = 7 \\ a_1 + a_2 = S_2 = 20 \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} a_1 = 7 \\ a_2 = 13 \end{cases} \text{и } d = a_2 - a_1 = 6. \quad \text{Ответ: 6.}$$

Пример 73. Найти разность арифметической прогрессии и её четвёртый член, если:

$$\begin{cases} 2a_3 + 3a_4 = 8 \\ 4a_2 + 5a_5 = 18. \end{cases}$$

Решение. Используя формулу (3.3), получим:

$$\begin{cases} 2(a_4 - d) + 3a_4 = 8 \\ 4(a_4 - 2d) + 5(a_4 + d) = 18 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 5a_4 - 2d = 8 \\ 9a_4 - 3d = 18. \end{cases}$$

Умножим нижнее уравнение на $-\frac{2}{3}$ и прибавим к верхнему – тем самым избавимся от d, затем умножим верхнее на -3, а нижнее – на $\frac{5}{3}$

и также сложим:

$$\begin{cases} 5a_4 - 2d = 8 & \cdot \\ 9a_4 - 3d = 18 & \cdot -2/3 \end{cases} \quad \begin{matrix} (-3) \\ \cdot 5/3 \end{matrix} \begin{cases} d = 6 \\ -a_4 = -4. \end{cases} \quad \text{Ответ: } a_4 = 4, d = 6.$$

Пример 74. Решить уравнение. $(5+x)+(8+x)+(11+x)+\ldots+(62+x) = 550$.

Решение. Видно, что сумма, заданная в условии, имеет вид арифметической прогрессии, где: $a_1 = 5 + x, d = 3, a_n = 62 + x$ и $S_n = 550$.

Подставим в формулу общего члена арифметической прогрессии (3.2) найденные величины: $62+x = 5+x+3(n-1)$. Откуда $n = 20$. Воспользуемся формулой суммы n членов арифметической прогрессии (3.5):

$$550 = \frac{5 + x + 62 + x}{2} \cdot 20. \qquad \text{Ответ: } x = -6.$$

Пример 75. Решить уравнение. $3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + x = 2400$.

Решение. Видно, что сумма, заданная в условии, имеет вид арифметической прогрессии, где: $a_1 = 3, d = 2, a_n = x$ и $S_n = 2400$. Найденные величины подставим в формулу общего члена арифметической прогрессии (3.2): $x = 3 + 2(n - 1) = 2n + 1$. Подставим $x = 2n + 1$ в формулу суммы n членов арифметической прогрессии (3.5): $2400 = \frac{1}{2}(3+2n+1)\cdot n$. Решая квадратное уравнение, находим $n_1 = 48, n_2 = -50$. Отбрасывая решение с отрицательным n, оставляем $n = 48$ (n должно быть натуральным), откуда $x = 2 \cdot 48 + 1 = 97$. Ответ: $x = 97$.

3.2 Геометрическая прогрессия.

Последовательность, обладающая свойством, что каждое последующее число равно предыдущему, умноженному на некоторую постоянную величину, называется *геометрической прогрессией*. Обозначим члены геометрической прогрессии как b_n, где n – порядковый номер и запишем их в порядке следования:

$$b_1, \quad b_2 = b_1 q, \quad b_3 = b_2 q = b_1 q^2, \quad b_4 = b_3 q = b_1 q^3, \ldots. \tag{3.7}$$

Здесь q – постоянная величина, данная в определении, называемая *знаменателем геометрической прогрессии*. Из вида (3.7) следует *формула общего члена геометрической прогрессии*:

$$b_n = b_1 q^{n-1}. \tag{3.8}$$

Если известен k-ый член геометрической прогрессии, то

$$b_n = b_k q^{n-k}. \tag{3.9}$$

Сумма первых n членов геометрической прогрессии находится по формуле:

$$\begin{cases} S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1 \\ S_n = nb_1, & q = 1, \end{cases} \tag{3.10}$$

которая называется также *характеристическим свойством геометрической прогрессии.* Действительно, умножая сумму первых n – членов геометрической прогрессии на q, получим:

$$qS_n = q(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = b_2 + b_3 + \ldots + b_n + b_{n+1} = S_n + b_1 q^n - b_1,$$

откуда и следует формула (3.10).

Если даны b_{n-k} и b_{n+k}, то формула *среднего члена b_n, геометрической прогрессии* следующая:

$$b_n = \pm\sqrt{b_{n-k}b_{n+k}}, \quad \text{при } k = 1: \quad b_n = \pm\sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}. \tag{3.11}$$

Заметим, что в соответствии с формулой 3.11 средний член геометрической прогрессии определяется с точностью до знака.

Пример 76. Найти знаменатель геометрической прогрессии, если задана формула её общего члена: $b_n = 8 \cdot \left({}^5/_3\right)^{2n}$.

Решение. В заданную в условии формулу общего члена геометрической прогрессии подставим $n = 1$ и $n = 2$. В результате получим:

$$b_1 = 8 \cdot (\frac{5}{3})^2, \quad b_2 = 8 \cdot (\frac{5}{3})^4.$$

Откуда $q = b_2/b_1 = \dfrac{8 \cdot (5/3)^4}{8 \cdot (5/3)^2} = (5/3)^2 = 25/9$. Ответ: 25/9.

Заметим, что из задания общего члена в виде $b_n = 8(5/3)^{2n}$ уже следует, что $q = 25/9$. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно выделить степень n: $b_n = 8 \cdot (5/3)^{2n} = 8 \cdot (25/9)^n$, и, сравнивая с формулой общего члена (3.8), видим, что: $q = 25/9$.

Пример 77. Найти знаменатель геометрической прогрессии, её первый член и формулу общего члена, если сумма её первых n членов выражается формулой: $S_n = 2(1 - 3^{-n})$.

Решение. Сравнивая формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии (3.10) с условием задачи: $S_n = 2(1-3^{-n}) = 2(1-(\frac{1}{3})^n)$, видим, что $q = 1/3$. С другой стороны, из определения суммы n первых членов геометрической прогрессии получим: $S_1 = b_1 = 2(1-1/3) = 4/3$. Откуда находим, что $b_n = \frac{4}{3}(\frac{1}{3})^{n-1} = 4/3^n$. Ответ: $q = 1/3$, $b_1 = 4/3$ и $b_n = 4/3^n$.

Пример 78. Найти знаменатель геометрической прогрессии, b_5 и формулу общего члена, если: $\begin{cases} b_5 + b_7 = 15 \\ b_6 + b_8 = 30. \end{cases}$

Решение. Используя формулу (3.9), запишем условие задачи через пятый член и знаменатель геометрической прогрессии. В результате получим:

$$\begin{cases} b_5 + b_5q^2 = 15 \\ b_5q + b_5q^3 = 30 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_5(1+q^2) = 15 \\ b_5q(1+q^2) = 30. \end{cases}$$

Разделим нижнее уравнение на верхнее: $\dfrac{b_5q(1+q^2)}{b_5(1+q^2)} = \dfrac{30}{15} = 2$. Откуда $q = 2$. Наконец из первого уравнения системы находим: $b_5 + b_7 = b_5(1+q^2) = b_5 \cdot 5 = 15$. Следовательно $b_5 = 3$. Так как $b_1 = b_5q^{-4}$, то из (3.9) следует: $b_n = b_5 \cdot q^{-4+n-1} = b_5 \cdot q^{n-5} = 3 \cdot 2^{n-5}$. Ответ: $q = 2, b_5 = 3, b_n = 3 \cdot 2^{n-5}$.

Пример 79. Три числа, сумма которых равна 45, образуют арифметическую прогрессию. Если от первого отнять 3, а к третьему прибавить 7, то получим геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

Решение. Запишем условие в табличку:

арифметическая прогрессия	a_1	$a_1 + d$	$a_1 + 2d$
геометрическая прогрессия	$a_1 - 3$	$a_1 + d$	$a_1 + 2d + 7$

Воспользуемся равенством, справедливым для членов геометрической прогрессии:

$$b_{n+1}/b_n = b_n/b_{n-1}.$$

Таким образом условие можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 45 \\ \dfrac{a_1 + 2d + 7}{a_1 + d} = \dfrac{a_1 + d}{a_1 - 3}. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_1 + d = 15 \\ (22+d)(a_1 - 3) = 15^2. \end{cases}$$

Решаем систему уравнений методом подстановки: из верхнего уравнения подставим в нижнее $a_1 = 15 - d$ и получим квадратное уравнение:

$d^2 + 10d - 39 = 0$. Откуда $d_1 = 3, d_2 = -13$. Находим, что при $d = 3$ это числа $12, 15, 18$, а при $d = -13$ это числа $28, 15, 2$. Ответ: $12, 15, 18$ или $28, 15, 2$.

Пример 80. Три числа, сумма которых равна 42, образуют убывающую геометрическую прогрессию. Если от первого отнять 8, а к третьему прибавить 2, то получим арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

Решение. Запишем условие в табличку:

геометрическая прогрессия	b_1	b_1q	b_1q^2
арифметическая прогрессия	$b_1 - 8$	b_1q	$b_1q^2 + 2$

Воспользуемся равенством, справедливым для членов арифметической прогрессии:

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}.$$

Таким образом условие можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 = 42 \\ b_1q^2 + 2 - b_1q = b_1q - b_1 + 8 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 42 \\ b_1(q^2 - 2q + 1) = 6. \end{cases}$$

Подставляя из первого уравнения b_1 во второе, получим квадратное уравнение: $2q^2 - 5q + 2 = 0$. Откуда $q_1 = 2, q_2 = 1/2$. Так как по условия прогрессия убывающая, то решение $q = 2$ необходимо отбросить. Находим $b_1 = 42/(1 + 1/2 + 1/2^2) = 24$. Теперь можно найти и все другие числа. Ответ: 24, 12, 6.

Если знаменатель геометрической прогрессии q по модулю меньше единицы, то такая последовательность называется *бесконечноубывающей геометрической прогрессией*. Сумма всех членов такой последовательности имеет смысл и определяется формулой:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}. \tag{3.12}$$

Пример 81. Представить в виде обыкновенной дроби число 1.(2).

Решение. $1.(2) = 1.222\ldots = 1 + 0.2 + 0.02 + 0.002 + \ldots$. Видно, что числа $0.2, 0.02, 0.002, \ldots$ образуют бесконечноубывающую геометрическую прогрессию. Найдём знаменатель этой прогрессии: $q = 0.002/0.02 = 0.1$. Тогда сумма всех членов геометрической прогрессии равна: $S = 0.2/(1 - 0.1) = 2/9$. Таким образом $1.(2) = 1 + S = 1 + 2/9 = 1^2/_9$. Ответ: $1^2/_9$.

Пример 82. Найти цифру n бесконечнопериодической дроби $a = 0.(3n)$, если известно, что число $11 \cdot a$ целое.

Решение. Представим бесконечнопериодическую дробь в виде обыкновенной:

$$0.(\overline{3n}) = 0.\overline{3n} + 0.00\overline{3n} + 0.000\overline{3n} + \ldots = \frac{0.\overline{3n}}{1-0.01} = \frac{\overline{3n}}{99}.$$

Тогда ${}^{\overline{3n}}/_{99} \cdot 11 = {}^{\overline{3n}}/_{9} = (3 \cdot 10 + n)/9$. Но число $\overline{3n}$ делится на 9 только при $n = 6$ (по признаку делимости). Ответ: $n = 6$.

3.3 Задания.

95. Найти разность арифметической прогрессии, если задана формула её общего члена:

1). $a_n = 6n-2$ 2). $a_n = 7n+5$ 3). $a_n = 9-13n$ 4). $a_n = 1-n/3$.

96. Найти разность арифметической прогрессии, если сумма её первых n членов выражается формулой:

1). $S_n = 3n^2 - 4n$ 2). $S_n = -4n^2 + 5n$ 3). $S_n = 6n^2 - 3n$.

97. Известно, что сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 6, найти её четвёртый член.

98. Известно, что сумма второго и четвёртого членов арифметической прогрессии равна -12, найти её третий член.

99. Известно, что сумма седьмого и одиннадцатого членов арифметической прогрессии равна 18, найти девятый член.

100. Известно, что сумма второго и восьмого членов арифметической прогрессии равна -26, найти её пятый член.

101. Известно, что сумма четвёртого, пятого и шестого членов арифметической прогрессии равна 20, найти сумму её первых девяти членов.

102. Известно, что сумма третьего и четвёртого членов арифметической прогрессии равна 15, найти сумму её первых шести членов.

103. Известно, что сумма пятого, шестого, седьмого и восьмого членов арифметической прогрессии равна 35, найти сумму её первых двенадцати членов.

104. Найти формулу общего члена арифметической прогрессии, если:

1). $\begin{cases} a_3 + a_6 = 12 \\ a_4 + a_8 = 18 \end{cases}$ 2). $\begin{cases} a_5 + a_7 = 20 \\ a_9 + a_{11} = 36 \end{cases}$ 3). $\begin{cases} a_8 + a_7 = 38 \\ a_3 + a_9 = 14 \end{cases}$

4). $\begin{cases} 3a_2 + 5a_4 = 15 \\ 2a_3 - a_7 = 4 \end{cases}$ 5). $\begin{cases} 2a_5 + 4a_4 = 26 \\ 4a_2 - a_6 = 2 \end{cases}$ 6). $\begin{cases} 3a_3 + 2a_2 = 9 \\ 4a_6 + 6a_3 = 50. \end{cases}$

105. Решить уравнение.

1). $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots + x = 1365.$

2). $3 + 7 + 11 + 15 + \ldots + x = 820.$

3). $(2 + x) + (5 + x) + (8 + x) + \ldots + (119 + x) = 2620.$

4). $(9 + x) + (14 + x) + (19 + x) + \ldots + (124 + x) = 1548.$

106. Предполагая, что числа $a_1 = 3, a_2 = 7, \ldots$, образуют арифметическую прогрессию, найти сумму первых 20 её членов.

107. Пусть числа $a_1 = 5, a_2 = 8, \ldots$, образуют арифметическую прогрессию, найти сумму первых 20 её членов.

108. Предполагая, что числа $a_1 = 8, a_2 = 14, \ldots$, образуют арифметическую прогрессию, найти сумму первых 20 её членов.

109. Известно, что в арифметической прогрессии $a_8 = 12$ и $a_7 - a_2 = 20$. Найти a_{12}.

110. Известно, что в арифметической прогрессии $a_5 = 18$ и $a_{15} - a_9 = 18$. Найти a_{10}.

111. Известно, что в арифметической прогрессии $a_9 = 15$ и $a_8 - a_5 = 18$. Найти a_{15}.

112. Найти знаменатель геометрической прогрессии, если задана формула её общего члена:

1). $b_n = \frac{2}{3}(\frac{3}{5})^n$ 2). $b_n = \frac{4}{5}(\frac{2}{7})^{2n-1}$ 3). $b_n = 6(\frac{5}{9})^{2n+3}$.

113. Найти формулу общего члена геометрической прогрессии, если сумма её первых n членов выражается формулой:

1). $S_n = 4(1 - 2^n)$ 2). $S_n = 3(1 - 2^{-n})$ 3). $S_n = \frac{2}{3}(1 - (\frac{3}{4})^{2n})$.

114. Известно, что произведение второго и четвёртого членов геометрической прогрессии равна 16, найти её третий член.

115. Известно, что произведение шестого и восьмого членов геометрической прогрессии равна 64, найти её седьмой член.

116. Известно, что произведение второго и шестого членов геометрической прогрессии равна 9, найти четвёртый член.

117. Известно, что произведение второго и восьмого членов геометрической прогрессии равна 25, найти её пятый член.

118. Найти формулу общего члена геометрической прогрессии, если:

1). $\begin{cases} b_3 + b_6 = 12 \\ b_4 + b_7 = 24 \end{cases}$ 2). $\begin{cases} b_5 + b_7 = 28 \\ b_6 + b_8 = 84 \end{cases}$ 3). $\begin{cases} b_4 + b_6 = 81 \\ b_1 + b_3 = 3. \end{cases}$

119. Три числа, сумма которых равна 26, образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Если от первого отнять 5, а от третьего

отнять 3, то получим арифметическую прогрессию. Найти исходные числа.

120. Три числа, сумма которых равна 42, образуют убывающую геометрическую прогрессию. Если от первого отнять 10, а к третьему прибавить 4, то получим числа, образующие арифметическую прогрессию. Найти получившиеся числа.

121. Три заданных числа, сумма которых равна 26, образуют убывающую геометрическую прогрессию. Если от первого отнять 4, а ко второму прибавить 2, то получим числа, образующие арифметическую прогрессию. Найти заданные числа.

122. Известно, что три числа, сумма которых 18, образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Если к третьему числу прибавить 3, то получим геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

123. Известно, что три числа, сумма которых 36, образуют убывающую арифметическую прогрессию. Если к первому числу прибавить 9, а от третьего отнять 3, то получим геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

124. Известно, что три числа, сумма которых 27, образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Если ко второму числу прибавить 1, а к третьему – прибавить 7, то получим геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

125. Четыре числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию, а её первый, третий и четвёртый члены – арифметическую. Найти знаменатель этой прогрессии.

126. Четыре числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию, а её первый второй и четвёртый члены – геометрическую. Найти знаменатель этой прогрессии, если третий член арифметической прогрессии равен 12.

127. Четыре числа образуют убывающую арифметическую прогрессию, а её первый третий и четвёртый члены – геометрическую. Найти знаменатель этой прогрессии, если второй член арифметической прогрессии равен 45.

128. Представить бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной: 1). 0.(3); 2). 0.(21); 3). 1.(12) 4). 2.(36).

129. Найти цифру n бесконечнопериодической десятичной дроби $0.(6n)$, если известно, что это число, умноженное на 18, – целое.

130. Найти цифру n бесконечнопериодической десятичной дроби $0.5(n)$, если известно, что это число, умноженное на 15, – целое.

131. Найти цифру n бесконечнопериодической десятичной дроби

$1.2(n)$, если известно, что это число, умноженное на 15, – целое.

132. Вычислить:

$$1).\quad \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots}{2+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\dots}\qquad 2).\quad \frac{2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots}{3+\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\dots}.$$

Ответы.

95. 1). 6 2). 7 3). -13 4). $-\frac{1}{3}$.
96. 1). 6 2). -8 3). 12.
97. 3 98. -6. 99. 9 100. -13.
101. 60 102. 45. 103. 105.
104. 1). $2n-3$ 2). $2n-2$ 3). $8n-41$ 4). $-0.5n+3.5$ 5). n 6). $2n-3.4$.
105. 1). 89 2). 79 3). 5 4). -2.
106. 820. 107. 670. 108. 1300. 109. 28. 110. 33. 111. 51.
112. 1). $\frac{3}{5}$ 2). $\frac{4}{49}$ 3). $\frac{25}{81}$.
113. 1). -2^{n+1} 2). $3/2^n$ 3). $\frac{21}{8}\cdot(\frac{9}{16})^{n-1}$.
114. ± 4. 115. ± 8. 116. ± 3. 117. ± 5.
118. 1). $2^n/6$ 2). $2.8\cdot 3^{n-5}$ 3). $3^n/10$.
119. $2,6,18$. 120. $14,12,10$. 121. $18,6,2$. 122. $3,6,9$.
123. 15,12,9. 124. $5,9,13$. 125. $(1+\sqrt{5})/2$. 126. 2. 127. $\frac{1}{2}$.
128. 1). $\frac{1}{3}$ 2). $\frac{7}{33}$ 3). $1\frac{4}{33}$ 4). $2\frac{4}{11}$.
129. 6 130. 3 или 9 131. 0 или 6 132. 1). $\frac{4}{5}$ 2). $\frac{12}{19}$.

Глава 4

Показательная и логарифмические функции.

4.1 Показательная функция и её свойства.

Для всякого положительного числа a можно определить число a^x, где x – степень числа a:

– если $x = n \in N$ – натуральное, то $a^n \equiv \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{раз}}$. Так как $a \neq 0$, то $a^{-n} \equiv \dfrac{1}{a^n}$ и $a^0 = a^{n-n} = \dfrac{a^n}{a^n} = 1$. Тем самым для положительного числа a определяется число a^m в любой целой степени $m \in Z$;

– если $x = \dfrac{m}{n}, n \in N, m \in Z$, то есть $x = p \in Q$ – рациональное, то $a^{\frac{m}{n}} \equiv \sqrt[n]{a^m}$;

– если $x = q$ – иррациональное, то, как всякое иррациональное число q представимо в виде десятичной дроби. Пользуясь этим фактом, можно показать, что a^q также определено (это делается в курсе высшей математики).

По точкам можно построить график соответствия $x \to a^x$. Так, для $a = 2, a = 1$ и $a = 1/2$ он представлен на рисунках 11 – 13.

Замечательным свойством соответствия $x \to a^x$, что видно из графиков 11 – 13, является то, что одному значению x отвечает только одно значение y. Следовательно соответствие f: $x \to y = f(x) = a^x, a > 0$ – функция. Эта функция называется *показательной*.

Из рис. 11 – 13 видно, что функция 2^x – возрастающая, то есть при увеличении x увеличивается и $y = 2^x$; функция $1^x = 1$ – постоянная,

рис. 11. рис. 12. рис. 13.

функция $(1/2)^x$ – убывающая, то есть при увеличении x уменьшается $y = (1/2)^x$. Нетрудно убедиться, что и в общем случае для показательной функции a^x:

$$\begin{array}{llll} \text{при} & 0 < a < 1, & f(x) = a^x & \text{– убывающая;} \\ \text{при} & a = 1, & f(x) = 1^x & \text{– постоянная;} \\ \text{при} & a > 1, & f(x) = a^x & \text{– возрастающая.} \end{array}$$

Из определения показательной функции следуют её основные свойства:

$$1.\quad (a^x)^y = a^{xy} \qquad 2.\quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad 3.\quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$
$$4.\quad (ab)^x = a^x b^x \qquad 5.\quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

4.2 Логарифмическая функция и её свойства.

При $a = 1$ всем значениям x соответствует только одно значение $y = 1^x = 1$, поэтому обратное соответствие $y \to x$ имеет вид $1 \to R$, то есть это соответствие не функция. При $0 < a < 1$ и $a > 1$, соответствие $x \to a^x$ – взаимнооднозначно, что видно из графиков 11, 13, поэтому при таких a показательная функция имеет обратную f^{-1}. Функцией, обратной показательной, называется *логарифмическая функция*. Так, если $f(x) = a^x = y, a > 0, a \neq 1$, то $f^{-1}(y) = \log_a y = x$, для которой $f(f^{-1}(y)) = y$ или $a^{\log_a y} = y$. Заменяя $x \leftrightarrow y$, получим

$$a^{\log_a x} = x \tag{4.1}$$

– *основное логарифмическое тождество.*

По точкам можно построить график логарифмической функции. Так, на рис. 14 – 57 представлены графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_{1/2} x$. Вид графика логарифмической функции зависит от основания:

если основание больше единицы, то график имеет вид как на рис. 14, если же основание меньше единицы (но больше нуля), то график такой же как и на рис. 57.

Заметим, что так как функция $f(x) = a^x, a > 1$ – возрастающая, то и функция $f^{-1}(x) = \log_a x, a > 1$ – возрастающая. Аналогично функция $\log_a x, 0 < a < 1$ – убывающая.

Из определения логарифма как обратной функции для показательной следует, что $\log_a x, a > 0, a \neq 1$ определён только для положительных $x > 0$, то есть область допустимых значений (О. Д. З.) логарифмической функции – все положительные числа.

рис. 14. рис. 15.

Из свойств показательной функции следуют свойства логарифма: при $a, p, q, c > 0; a, c \neq 1; k \neq 0$

1. $\log_a(pq) = \log_a p + \log_a q$
2. $\log_a \dfrac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$
3. $\log_a p = \dfrac{\log_c p}{\log_c a}$
4. $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$
5. $\log_a x^n = n \log_a x$
6. $\log_{a^k} x = \dfrac{1}{k} \log_a x$
7. $\log_a a = 1$
8. $\log_a 1 = 0$
9. $\log_{a^n} x^n = \log_a x.$

Докажем, например, первое и третье свойства.

1. ∘ Пусть $\log_a p = x, \log_a q = y$, то есть $a^x = p, a^y = q$, тогда $pq = a^x a^y = a^{x+y}$ или $\log_a(pq) = x + y = \log_a p + \log_a q$. •

3. ∘ Пусть $\log_a p = x$, то есть $a^x = p$, тогда $p^k = (a^x)^k = a^{kx}$ или $\log_a p^k = kx = k \log_a p$. • Аналогично доказываются и все другие свойства.

Пример 83. Вычислить $\log_{2\sqrt{8}} \dfrac{4\sqrt{32}}{\sqrt[3]{16}}$.

Решение. $\log_{2\sqrt{8}} \dfrac{4\sqrt{32}}{\sqrt[3]{16}} = \log_{2^{1+\frac{3}{2}}} 2^{2+\frac{5}{2}-\frac{4}{3}} = \log_{2^{\frac{5}{2}}} 2^{\frac{19}{6}} = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{19}{6} = \dfrac{19}{15}$.

Пример 84. Решить уравнение: $3^{4x^2} = 7$.

Решение. Из определения логарифма следует: $4x^2 = \log_3 7$ откуда находим $x = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\log_3 7}$.

Пример 85. Вычислить $2^{\log_4(\sqrt{3}-2)^2}+3^{\log_9(\sqrt{3}+2)^2}$.

Решение. $2^{\log_4(\sqrt{3}-2)^2}+3^{\log_9(\sqrt{3}+2)^2}=2^{\frac{1}{2}\log_2(\sqrt{3}-2)^2}+3^{\frac{1}{2}\log_3(\sqrt{3}+2)^2}=$ $2^{\log_2|\sqrt{3}-2|}+3^{\log_3|\sqrt{3}+2|}=|\sqrt{3}-2|+|\sqrt{3}+2|=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4.$

Может оказаться полезной формула:

$$\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c,$$

справедливая при всех $a,b,c>0$ и $a,b\neq 1$ и следующая из 4 и 5 свойств логарифма.

Пример 86. Вычислить: $\log_{25}64\cdot\log_{16}9\cdot\log_{27}125$.

Решение. $\log_{25}64\cdot\log_{16}9\cdot\log_{27}125=\log_{5^2}4^3\cdot\log_{4^2}3^2\cdot\log_{3^3}5^3=$
$=\frac{1}{2}\cdot 3\log_5 4\cdot\log_4 3\cdot\log_3 5=\frac{3}{2}\log_5 5.$

(При решении этого примера была использована ещё одна полезная формула, следующая из 5 и 6 свойств логарифма:

$$\log_{a^k}b^k=\log_a b,\qquad a,b>0,a\neq 0,a\neq 1,k\neq 0.)$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Пример 87. Найти $\log_6 54$, если $\log_3 2=a$.

Решение. Перейдём к новому основанию и разложим аргумент логарифма на простые сомножители:

$$\log_6 54=\frac{\log_3 54}{\log_3 6}=\frac{\log_3(3^3\cdot 2)}{\log_3(2\cdot 3)}=\frac{\log_3 2+3}{\log_3 2+1}=\frac{a+3}{a+1}.$$

Пример 88. Найти $\log_{125}48$, если $\log_{12}15=a,\log_{18}6=b$.

Решение. Перейдём к новому основанию и разложим аргументы логарифмов a и b на простые сомножители: $b=\log_{18}6=\frac{\log_2 6}{\log_2 18}=\frac{1+\log_2 3}{1+2\log_2 3}$. Следовательно $b+2b\log_2 3=1+\log_2 3$ и $\log_2 3=\frac{1-b}{2b-1}$. Аналогично $a=\log_{12}15=\dfrac{\log_2 15}{\log_2 12}=\dfrac{\log_2 3+\log_2 5}{2+\log_2 3}$. Выделяя $\log_2 5$, получим: $\log_2 5=2a+(a-1)\dfrac{1-b}{2b-1}$. Тогда $\log_{125}48=\dfrac{1}{3}\log_5 48=\dfrac{\log_2 3+4}{3\log_2 5}=$ $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4+(1-b)/(2b-1)}{2a+(a-1)(1-b)/(2b-1)}=\dfrac{7b-3}{3(3ab-a+b-1)}$.

Пример 89. Расположить в порядке возрастания: $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}},3,(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$.

Решение. Предположим, что $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}<(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$ и докажем это, избавляясь от иррациональности.

Левую и правую части возведём в квадрат, затем в степень $\sqrt{3}$: $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$, $2^3<3^{\sqrt{6}}$ и с помощью оценки избавимся от иррациональности:

$3^{\sqrt{6}} > 3^{\sqrt{4}} = 3^2 = 9 > 8 = 2^3$. Таким образом предположение верно. Пусть теперь $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}} < 3$. Тогда: $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}} < 3 \to 3^{\sqrt{2}} < 9$. Но $3^{\sqrt{2}} < 3^{3/2} < 9$, так как $3^3 < 9^2$. Ответ: $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}, (\sqrt{3})^{\sqrt{2}}, 3$.

Пример 90. Расположить в порядке возрастания: $\log_2 3, 2, \log_3 4$.

Решение. Покажем, что $\log_2 3 > \log_3 4$.

Пусть $a = \log_2 3, b = \log_3 4$. Тогда $2^a = 3, 3^b = 4$. Так как $a, b > 1$, то

$$3^a = 3^{1+a-1} = 3 \cdot 3^{a-1} > 3 \cdot 2^{a-1} = \frac{3}{2} \cdot 2^a = \frac{3}{2} \cdot 3 > 4 = 3^b,$$

(так как при $x > 1, 3^x > 2^x$). Следовательно $a > b$ или $\log_2 3 > \log_3 4$. Но $\log_2 3 < \log_2 4 = 2$. Ответ: $\log_3 4, \log_2 3, 2$.

Пример 91. Решить уравнение: $8^{2x} - 5 \cdot 12^x = 0$.

Решение. Выделим простые сомножители:

$$2^{6x} - 5 \cdot 2^{2x} \cdot 3^x = 0 \quad \text{или} \quad 2^{2x}(2^{4x} - 5 \cdot 3^x) = 0.$$

Так как $2^{2x} \neq 0$, то $2^{4x} = 5 \cdot 3^x$. Откуда $2^{4x}/3^x = 5$ или $(2^4/3)^x = 5$. Следовательно $x = \log_{16/3} 5$. Ответ: $x = \log_{16/3} 5$.

Пример 92. Решить уравнение: $3^{x-2} + 3^{x-4} = 5^{x-3} + 5^{x-4}$.

Решение. Вынесем наименьшую степень за скобку:

$$3^{x-4}(3^2 + 1) = 5^{x-4}(5 + 1) \quad \text{или} \quad (3/5)^{x-4} = 3/5.$$

Откуда: $x - 4 = 1$. Ответ: $x = 5$.

Пример 93. Решить уравнение: $3^{2x-1} + 3^x = 6$.

Решение. Выделим степень 3^x: $\frac{1}{3} \cdot 3^{2x} + 3^x - 6 = 0$. Вводя новую переменную $t = 3^x, t > 0$ получим квадратное уравнение: $\frac{1}{3} \cdot t^2 + t^2 - 6 = 0$. Откуда $t_1 = 3$, $t_2 = -6$ – п. к. Следовательно $3^x = 3$. Ответ: $x = 1$.

Пример 94. Решить уравнение: $6^{2x} + 3 \cdot 9^x - 2 \cdot 4^x = 0$.

Решение. Если ввести обозначения $3^x = a, 2^x = b$, то условие примет вид: $ab + 3a^2 - 2b^2 = 0$. Это однородное уравнение с однородной функцией второго порядка, которое решается делением левой части на одну из переменных в максимальной степени, например, на $b^2, b \neq 0$ (или на 2^x в исходном уравнении): $\left(\frac{3}{2}\right)^x + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 2 = 0$ – квадратное уравнение относительно новой переменной $t = (3/2)^x, t > 0$: $3t^2 + t - 2 = 0$. Его решения: $t_1 = (2/3), t_2 = -1$ – п. к. Следовательно $(3/2)^x = 2/3$. Ответ: $x = -1$.

Пример 95. Решить уравнение: $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 14$.

Решение. Заметим, что $(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})=1$, поэтому $2-\sqrt{3}=1/(2+\sqrt{3})$. Следовательно, исходное уравнение можно записать следующим образом: $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\dfrac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x}=14$. Вводя переменную $t=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$, $t>0$, получим: $t+1/t=14$. Домножая на t и перенося все в левую часть, придём к квадратному уравнению: $t^2-14t+1=0$, которое имеет решения: $t_{1,2}=7\pm\sqrt{48}$. Следовательно:

(1) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=7+\sqrt{48}=(2+\sqrt{3})^2$, откуда: $x/2=2, x=4$.

(2) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=7-\sqrt{48}=(2-\sqrt{3})^2=(2+\sqrt{3})^{-2}$, откуда: $x/2=-2, x=-4$. Ответ: $x=\pm4$.

Пример 96. Решить уравнение: $\log_{x+2}(2x^2+7x+6)=2$.

Решение. Из определения логарифма следует (учтём О. Д. З.):

$$\begin{array}{cc}
(x+2)^2=2x^2+7x+6 & \text{О. Д. З.} \\
x^2+4x+4=2x^2+7x+6 & \left\{\begin{array}{c} 2x^2+7x+6>0 \\ x+2>0 \\ x+2\neq 1 \end{array}\right. \\
x^2+3x+2=0 & \\
x=-1, x=-2 &
\end{array}$$

При решении уравнений нет необходимости находить решения системы неравенств О. Д. З., так как обычно[1] достаточно подставить в О. Д. З. найденные решения.

Видим, что ни $x=-1$ (т.к. $-1+2=1$, но по О. Д. З. $x+2\neq 1$), ни $x=-2$ (т.к. $-2+2=0$, по О. Д. З. $x+2>0$), поэтому никакое из найденных решений не входит в О. Д. З. Ответ: решений нет.

Пример 97. Решить уравнение: $\log_2^3 x^2-\log_2^2 x^3=0$.

Решение. Заметим, что $\log_2^3 x^2=(\log_2 x^2)^3=(2\log_2 x)^3=8\log_2^3 x$, поэтому заданное уравнение можно записать в виде: $8\log_2^3 x-9\log_2^2 x=0$.

Вводя новую переменную $t=\log_2 x$, получим уравнение: $8t^3-9t^2=0$ или $8t^2(t-9/8)=0$. Откуда $t=0, t=9/8$. Если $\log_2 x=0$, то $x=1$. Если $\log_2 x=9/8$, то $x=\sqrt[8]{512}$. Ответ: $x=\{1,\sqrt[8]{512}\}$.

При решении некоторых задач полезным оказывается равенство:

$$a^{\log_c b}=b^{\log_c a}, \tag{4.2}$$

которое доказывается логарифмированием левой и правой частей.

[1] оговорка «обычно» связана с тем, что в качестве решения может получиться промежуток, тогда О. Д. З. находить обязательно.

Пример 98. Решить систему: $\begin{cases} x^{\log_2 y} + 3y^{\log_2 x} = 4 \\ x + y = 5. \end{cases}$

Решение. Используя равенства (4.2), перепишем и решим первое уравнение системы: $x^{\log_2 y} + 3x^{\log_2 y} = 4$ или $x^{\log_2 y} = 1, x > 0$.

Логарифмируя последнее равенство получим: $\lg x \cdot \log_2 y = 0$. Следовательно $x = 1$ или $y = 1$, тогда: $\begin{cases} x = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} y = 1 \\ x = 4. \end{cases}$

Ответ: $x = 1, y = 4$ или $x = 4, y = 1$.

Рассмотрим уравнение вида: $f(x)^{g(x)} = 1$. Слева стоит так называемое показательно-степенное выражение. Так как правая часть уравнения больше нуля, то можно прологарифмировать левую и правую части: $\lg f(x)^{g(x)} = \lg 1 = 0$.

1). если $f(x) > 0$, то $g(x) \lg f(x) = 0$ и $\left[\begin{array}{l} g(x) = 0 \\ f(x) = 1. \end{array} \right.$

2). если $f(x) < 0$, то необходимо потребовать чётность степени, чтобы её можно было вынести, тогда $g(x) \lg(-f(x)) = 0$ и $\begin{cases} g(x) = \text{ чётно} \\ f(x) = -1. \end{cases}$

3). если $f(x) = 0$, то – решений нет.

В окончательный ответ должны входить все решения 1). и 2). случаев.

Пример 99. Решить уравнение: $x^{x^2-9} = 1$.

Решение. $\lg x^{x^2-9} = \lg 1 = 0$. В том случае, когда $x > 0$ можно воспользоваться свойством логарифма: $(x^2 - 9) \lg x = 0$. Откуда $x = \pm 3, x = 1$. Если же $x < 0$, то необходимо потребовать, чтобы степень $x^2 - 9$ была чётна, тогда:

$$\begin{cases} (x^2 - 9) \lg |x| = 0 \\ x < 0 \\ x^2 - 9 - \text{чётно} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm 3, x = \pm 1 \\ x < 0 \\ x^2 - 9 - \text{чётно.} \end{cases}$$

Откуда получаем дополнительный корень $x = -1$. Ответ: $x = \{\pm 1, \pm 3\}$.

4.3 Показательные и логарифмические неравенства.

Пример 100. Решить неравенство: $\log_{1/2} \log_2 (3 - 2x) \geqslant 0$.

Решение. Сведём задачу к сравнению логарифмов с одинаковым основанием. $\log_{1/2} \log_2 (3 - 2x) \geqslant \log_{1/2} 1$. Тогда $0 < \log_2 (3 - 2x) \leqslant 1$ – учтена О. Д. З. логарифма. Опять перейдём к сравнению логарифмов с одинаковым основанием: $\log_2 1 < \log_2(3-2x) \leqslant \log_2 2$ или $1 < 3-2x \leqslant 2$. Откуда $1 > x \geqslant \frac{1}{2}$. Ответ: $[1/2;1)$.

Пример 101. Решить неравенство: $\log_2(3x^2 - x^2 + 4) \leqslant 2$.

Решение. Приведём задание к сравнению логарифмов с одинаковыми основаниями: $\log_2(3x^2 - x^2 + 4) \leqslant \log_2 4$. Так как основания логарифмов больше единицы, то неравенство справедливо только при условии, когда аргумент логарифма слева меньше, чем аргумент логарифма справа. Но так мы переходим от сравнения логарифмов к сравнению аргументов, то необходимо добавить О. Д. З. логарифмической функции. В результате приходим к системе неравенств:

$$\begin{cases} -x^2 + 3x + 4 \leqslant 4 \\ -x^2 + 3x + 4 > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -x(x-3) \leqslant 0 \\ -(x-1)(x-4) > 0. \end{cases}$$

Решая систему методом интервалов, получим область совместных решений: $(-\infty;-1) \cup [3;4)$. Ответ: $(-\infty;-1) \cup [3;4)$.

Пример 102. Решить неравенство: $\log_{x-2} 2 \geqslant 1/3$.

Решение. Используя свойства логарифма, запишем исходное неравенство следующим образом: $\dfrac{1}{\log_2(x-2)} \geqslant 1/3$. Введём новую переменную $t = \log_2(x-2)$, тогда $1/t - 1/3 \geqslant 0$ или $(3-t)/(3t) \geqslant 0$. Решая задачу методом интервалов, получим $0 < t \leqslant 3$ или $\log_2 1 < \log_2(x-2) \leqslant \log_2 8$. Так как основания логарифмов больше единицы, то из сравнения значений функций получим неравенства: $1 < x - 2 \leqslant 8$ или $3 < x \leqslant 10$. Ответ: $(3;10]$.

Пример 103. Решить неравенство: $\dfrac{(x+2)\log_{1/2}(4x-7)}{(x-6)(3^x-27)} \leqslant 0$.

Решение. Заметим, что показательная и логарифмическая функции монотонны (то есть либо возрастающие, либо убывающие), поэтому как выражение $\log_{1/2}(4x-7)$, так и выражение $(3^x - 27)$, с точки зрения знака числа, ведут себя так же как и скобки $(x-2)$ (при $x = 2, \log_{1/2}(4x-7) = 0$) и $(x-3)$ (при $x = 3, 3^x - 27 = 0$). Поэтому решаем неравенство методом интервалов. Из рис. 16 находим область совместной штриховки. Ответ: $[2;3) \cup (6;+\infty)$.

рис. 16.

Пример 104. Решить неравенство: $\dfrac{(2^x-2)(3^{\frac{1}{x}}-9)}{x-3} \leqslant 0$.

Решение. Так как функция $a^x, a>1$ – возрастающая, то выражение 2^x-2^1 в исходном неравенстве равносильно $x-1$, а выражение $3^{\frac{1}{x}}-3^2$ равносильно $\frac{1}{x}-2=\frac{1-2x}{x}=\frac{2(x-1/2)}{x}$. Поэтому вместо заданного неравенства можно решать неравенство: $\frac{(x-1)2(x-1/2)}{x(x-3)}\leqslant 0$.

Ответ: $(-\infty;0)\cup[\frac{1}{2};1]\cup(3;+\infty)$.

4.4 Задания.

133. Вычислить.

1). $\log_{8\sqrt{2}}\frac{4\sqrt{8}}{\sqrt[3]{16}}$ 4). $\log_{0.5\sqrt{32}}\frac{2\sqrt{8}}{\sqrt[4]{32}}$ 7). $\log_{0.5\sqrt{8}}\frac{2\sqrt{8}}{\sqrt[3]{32}}$

2). $\log_{0.1\sqrt{10}}(10\sqrt[3]{100})$ 5). $\log_{9\sqrt{3}}\frac{\sqrt{27}}{3\sqrt{243}}$ 8). $\log_{3\sqrt{3}}\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[3]{243}}$

3). $\log_{5\sqrt{5}}\frac{5\sqrt{125}}{\sqrt[3]{625}}$ 6). $\log_{\sqrt{125}}\frac{\sqrt{5}\,\sqrt[4]{125}}{\sqrt[3]{25}}$ 9). $\log_{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{32}}$

134. Вычислить.

1). $2^{3-2\log_4 5}$ 3). $0.2^{\log_{25}16-2}$ 5). $0.5^{2-\log_2 5}$

2). $9^{2+\frac{1}{2}\log_3 5}$ 4). $9^{2+\log_3 7}$ 6). $2^{\log_{0.5}3-3}$

7). $0.2^{\log_{25}(\sqrt{3}-2)^2}+0.2^{\log_{25}(\sqrt{3}+2)^2}$ 8). $2^{\log_4(\sqrt{15}-4)^2}-2^{\log_4(\sqrt{15}+4)^2}$

135. Вычислить.

1). $\log_{4\sqrt{2}}(5\sqrt{125})\cdot\log_{5\sqrt{5}}(3\sqrt{27})\cdot\log_9 64$

2). $\log_{2\sqrt{8}}(9\sqrt{\frac{1}{27}})\cdot\log_{\sqrt{\frac{1}{125}}}(4\sqrt[3]{\frac{1}{16}})\cdot\log_{3\sqrt[3]{3}}(25\sqrt{\frac{1}{5}})$

3). $\log_{4\sqrt{\frac{1}{8}}}(25\sqrt{5})\cdot\log_{\sqrt[3]{\frac{1}{25}}}(\frac{1}{4}\sqrt{8})$ 4). $\log_{3\sqrt{\frac{1}{3}}}\left(4\sqrt{\frac{1}{8}}\right)\cdot\log_{16\sqrt{\frac{1}{2}}}\left(27\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)$

136. Расположить в порядке возрастания числа:

1). $2,\log_3 4,\log_4 5$ 3). $\log_3 5,2,\log_5 7$ 5). $\log_2 3,2,\log_4 5$

2). $\log_4 5,1,\log_5 6$ 4). $\log_2 5,2,\log_3 6$ 6). $\log_{1/2}3,-2,\log_{1/3}4$

137. Расположить в порядке возрастания числа:

1). $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}},2,(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ 3). $(\sqrt{5})^{\sqrt{2}},2,(\sqrt{2})^{\sqrt{5}}$ 5). $(\sqrt{3})^{\sqrt{5}},2,(\sqrt{5})^{\sqrt{3}}$

2). $(\sqrt[4]{2})^{\sqrt[4]{3}},2,(\sqrt[4]{3})^{\sqrt[4]{2}}$ 4). $(\sqrt[3]{2})^{\sqrt[3]{4}},2,(\sqrt[3]{3})^{\sqrt[3]{2}}$ 6). $(\sqrt[3]{2})^{\sqrt[3]{4}},2,(\sqrt[3]{4})^{\sqrt[3]{2}}$

138. Найти:

1). $\log_{18}12$, если $\log_2 3=a$ 2). $\log_{15}75$, если $\log_3 5=a$

3). $\log_{12}36$, если $\log_2 3=a$ 4). $\log_{20}100$, если $\log_5 2=a$

5). $\log_{90}40$, если $\log_3 5=a,\log_5 2=b$

6). $\log_{30}80$, если $\log_5 2=a,\log_5 3=b$

7). $\log_{24}150$, если $\log_2 3=a,\log_3 5=b$

8). $\log_{15}150$, если $\log_2 5=a,\log_2 3=b$

139. Решить уравнение.

1). $3^{\sqrt{x^2-4x}}=1$	6). $1^{\sqrt{x+\frac{2}{x-3}}}=1$	11). $x^{5x^2+9x+1}=x$
2). $5^{\sqrt{x^2-5x+6}}=1$	7). $1^{\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}}=1$	12). $x^{2x^2+7x+2}=x^{24}$
3). $4^{\sqrt{\frac{x-13}{x+4}}}=1$	8). $x^{3x^2-5x+2}=1$	13). $x^{3x^2-4x}=x^4$
4). $1^{x^2-4}=1$	9). $x^{5x^2-7x-6}=1$	14). $x^{3x^2-7x+5}=x$
5). $1^{\sqrt{3x-6}}=1$	10). $x^{2x^2-x-7}=x^{-1}$	15). $x^{2x^2-7x+2}=x^{-4}$

140. Решить уравнение.

1). $\log_2(3x+1)=2$	5). $\log_2(x^2-3x+10)=3$
2). $\log_3(2x+5)=3$	6). $\log_{1/2}(x^2+4x-17)=-2$
3). $\log_{1/2}(12-x)=-2$	7). $\log_{x-2}(x^2-3x+1)=2$
4). $\lg(1-9x)=-1$	8). $\log_{x-1}(x^2+x-4)=2$

141. Решить уравнение.

1). $\dfrac{\log_2(x^2-10)}{\log_2(3x)}=1$	3). $\dfrac{\log_3(3x^2-2)}{\log_3(5x)}=1$
2). $\dfrac{\lg(x^2-8)}{\lg(2x)}=1$	4). $\dfrac{\log_5(4x^2-5)}{\log_5 x}=1$

142. Решить уравнение.

1). $\log_3(10-3^x)=2-x$	3). $\log_2(4^{x+1}-\dfrac{1}{16})=\log_2 3+x-2$
2). $6x\log_2 3=\log_2(27^x+6)$	4). $x\log_3 2+2\log_3 5=\log_9(4^x+39)$

143. Решить уравнение.

1). $\lg(3^{\sqrt{4x+1}}-2^{4-\sqrt{4x+1}})-2=\lg 2-\sqrt{x+0.25}\lg 4$

2). $\log_3(4^{\sqrt{x^2-4}}-4)-\sqrt{x^2-4}\log_3 2=1$

3). $\log_6(6^{\sqrt{x-2}-4}-5)+\sqrt{x-2}=5$

4). $\sqrt{x^2-x}-1=\log_3(2+21\cdot 3^{2-\sqrt{x^2-x}})$

144. Решить уравнение.

1). $5\cdot 12^x-7\cdot 8^x=0$	3). $2\cdot 3^{5x}-5\cdot 18^x=0$
2). $7\cdot 9^x-13\cdot 10^x=0$	4). $5\cdot 2^{4x}-8\cdot 6^x=0$

145. Решить уравнение.

1). $3\cdot 2^{x-1}+2^{x+1}+5\cdot 2^x=68$

2). $2\cdot 5^{x-2}-4\cdot 5^{x-3}+3\cdot 5^{x-4}=165$

3). $2\cdot 3^{x+1}+4\cdot 3^{x-1}-4\cdot 3^x=90$

4). $3\cdot 4^{x+2}-7\cdot 4^{x+1}-8\cdot 4^x=48$

5). $3\cdot 2^{x+1}-2^{x-1}-2^x=7\cdot 3^x+3^{x-1}-2\cdot 3^{x+1}$

6). $5^{x-1}-4\cdot 5^{x-2}+4\cdot 5^{x-3}=5\cdot 3^{x-1}+3^{x-3}-7\cdot 3^{x-2}$

146. Решить уравнение.

1). $5^{2x-3}-4\cdot 5^{x-2}=1$	3). $9^x-30\cdot 3^x+81=0$
2). $4^x-5\cdot 2^x=24$	4). $7^{2x-1}-8\cdot 7^x+49=0$

147. Решить уравнение.

1). $12 \cdot 4^x - 35 \cdot 6^x + 18 \cdot 9^x = 0$

2). $5 \cdot 9^{x+1} - 152 \cdot 15^x + 3 \cdot 25^{x+1} = 0$

3). $3 \cdot 2^{2x+1} - 13 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x+1} = 0$

4). $4 \cdot 25^x - 9 \cdot 10^x - 25 \cdot 2^{2(x+1)} = 0$

148. Решить уравнение.

1). $x^{\lg x - 2} = 1000$ 4). $100x^{\lg x - 5} = 0.01$

2). $x^{\log_2 x - 3} = 16$ 5). $4x^{\log_{3/2} x^4} - 13x^{\log_{3/2} x^2} + 9 = 0$

3). $2x^{\log_2 x + 2} = 1$ 6). $x^{\log_2 x^2} - 20x^{\log_2 x} + 64 = 0$

149. Решить уравнение.

1).$(\sqrt{4-\sqrt{15}})^x + (\sqrt{4+\sqrt{15}})^x = 62$ 2).$(\sqrt{\sqrt{2}+1})^x - (\sqrt{\sqrt{2}-1})^x = 2$

3).$(\sqrt{5-\sqrt{24}})^x + (\sqrt{5+\sqrt{24}})^x = 10$ 4).$(\sqrt{3-\sqrt{8}})^x + (\sqrt{3+\sqrt{8}})^x = 34$

150. Решить уравнение.

1). $3\log_3^2 x - 5\log_3 x - 2 = 0$ 4). $\lg^2 x^3 - 17\lg x = 2$

2). $\log_5^2 x - 5\log_5 x + 6 = 0$ 5). $\log_2^2 4x^2 - 7\log_2 2x = 15$

3). $\log_2^2 x^2 - \log_2 x = 5$ 6). $\log_3^2(27x^3) - \log_3^3(9x^2) - \log_3 x = 1$

151. Решить систему уравнений.

1). $\begin{cases} x^{\log_2 y} + 3y^{\log_2 x} = 4 \\ x - 5y = 7 \end{cases}$ 3). $\begin{cases} x^{\lg y} + 9y^{\lg x} = 10 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

2). $\begin{cases} 4x^{\log_2 y} - y^{\log_2 x} = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ 4). $\begin{cases} 5x^{\log_3 y} + 8y^{\log_3 x} = 13 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$

152. Решить неравенство.

1). $0.3^{2x-7} < 0.3^{5x+2}$ 2). $0.5^{6x-1} \geqslant 2^{3x+2}$ 3). $4^{2x+7} > 2^{3x-1}$

4). $0.5^{x^2+3x} > 0.25^x$ 5). $3^{2x^2-7x} \leqslant 27^{-x}$ 6). $0.1^{7x^2-3x} \geqslant 0.01^{11}$

7). $2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x/2} \geqslant 2$ 8). $3^{2x-1} + 2 \cdot 3^{x+1} \leqslant 21$

9). $\lg x - \dfrac{3}{\lg x - 2} > 0$ 10). $\dfrac{1}{\log_2 x - 1} < \dfrac{1}{\log_2 x + 1}$

153. Решить неравенство.

1). $\log_2(2x-3) \geqslant 2$ 4). $\log_{1/3}(9x-7) > -3$

2). $\log_3(4+x) \leqslant 3$ 5). $\log_2(3x^2 - 10x + 7) \leqslant 2$

3). $\log_{1/2}(5-4x) \geqslant -1$ 6). $\log_{1/3}(x^2 + 6x - 7) \geqslant -2$

154. Решить неравенство.

1). $\log_2 \log_{1/2}(2x-1) \leqslant 2$ 3). $\log_{1/3} \log_2(2-x) > -1$

2). $\log_{1/4} \log_3(1-x) \geqslant 0$ 4). $\log_3 \log_{1/2}(2-3x) < 1$

155. Решить неравенство.

1). $\dfrac{\log_2 x - 3}{(2^x - 4)(x-5)} \leqslant 0$ 3). $\dfrac{(x-3)(\log_3 x - 2)}{(5^x - 5)(x-2)} \geqslant 0$

2). $\dfrac{(3x-1)(x+3)}{\log_{\frac{1}{2}}(3+2x)} \geqslant 0$ 4). $\dfrac{(3^x - 27)(2x-4)}{x\log_{\frac{1}{2}}(x+2)} \geqslant 0$

156. Решить неравенство.

1). $\dfrac{1}{\log_2(x-1)} \geqslant \dfrac{1}{4}$ 3). $\log_{2x-1}\dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{1}{3}$

2). $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(2-x)} \geqslant \dfrac{1}{2}$ 4). $\log_{3-2x}\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2}$

157. Решить неравенство.

1). $\dfrac{(3-27^{\frac{1}{x}})(2^x-4)}{x+2} \leqslant 0$ 2). $\dfrac{(2^{\frac{1}{x}}-4)(x-1)}{x+3} \geqslant 0$

3). $\dfrac{(5^{\frac{1}{x}}-25)(2^{\frac{1}{x}}-8)}{x+2} \geqslant 0$ 4). $\dfrac{(3^{\frac{1}{x}}-3)(5+x)}{2^{\frac{1}{x}}-16} \geqslant 0$

Ответы.

133. 1). $\frac{13}{21}$ 2). $-\frac{10}{3}$ 3). $\frac{7}{9}$ 4). $\frac{5}{6}$ 5). $-\frac{4}{5}$. 6). $\frac{7}{18}$ 7). $\frac{5}{3}$ 8). $-\frac{1}{9}$ 9). $-\frac{13}{9}$. 134. 1). $\frac{8}{5}$ 2). 405 3). $\frac{25}{4}$ 4). 3969 5). $\frac{5}{4}$ 6). $\frac{1}{24}$ 7). 4 8). $-2\sqrt{15}$. 135. 1). 5 2). $-\frac{1}{10}$ 3). $\frac{15}{4}$ 4). $\frac{2}{3}$

136. 1). $\log_4 5, \log_3 4, 2$ 2). $1, \log_5 6, \log_4 5$ 3). $\log_5 7, \log_3 5, 2$
4). $\log_3 6, 2, \log_2 5$ 5). $\log_4 5, \log_2 3, 2$ 6). $-2, \log_{\frac{1}{2}} 3, \log_{\frac{1}{3}} 4$.

137. 1). $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}, 2, (\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$ 2). $(\sqrt[4]{2})^{\sqrt[4]{3}}, (\sqrt[4]{3})^{\sqrt[4]{2}}, 2$
3). $2, (\sqrt{2})^{\sqrt{5}}, (\sqrt{5})^{\sqrt{2}}$ 4). $(\sqrt[3]{2})^{\sqrt{4}}, (\sqrt[3]{3})^{\sqrt[3]{2}}, 2$
5). $2, (\sqrt{3})^{\sqrt{5}}, (\sqrt{5})^{\sqrt{3}}$ 6). $(\sqrt[3]{2})^{\sqrt[3]{4}}, (\sqrt[3]{4})^{\sqrt[3]{2}}, 2$.

138. 1). $\frac{2+a}{1+2a}$ 2). $\frac{1+2a}{1+a}$ 3). $\frac{2(a+1)}{2+a}$ 4). $\frac{2(a+1)}{2a+1}$ 5). $\frac{a(1+3b)}{a+ab+2}$
6). $\frac{1+4a}{a+1+b}$ 7). $\frac{a+2ab+1}{a+3}$ 8). $\frac{1+2a+b}{a+b}$.

139. 1). $0, 4$ 2). $2, 3$ 3). 13 4). $(-\infty; +\infty)$ 5). $[2; +\infty)$
6). $[1; 2] \cup (3; +\infty)$ 7). $(-\infty; -3) \cup [2; +\infty)$ 8). $\pm 1, \frac{2}{3}$
9). $\pm 1, -\frac{3}{5}, 2$ 10). $-\frac{3}{2}, 1, 2$ 11). $-\frac{9}{5}, 0, \pm 1$ 12). $-\frac{11}{2}, 0, 1, 2$
13). $-\frac{2}{3}, 1, 2$ 14). $\pm 1, 0, \frac{4}{3}$ 15). $1, \frac{3}{2}, 2$.

140. 1). 1 2). 11 3). 8 4). 0.1 5). $1, 2$ 6). $-7, 3$
7). $\varnothing$ 8). $\frac{5}{3}$. 141. 1). 5 2). 4 3). 2 4). $5/4$.

142. 1). $0, 2$ 2). $\frac{1}{3}$ 3). -2 4). -2.

143. 1). 2 2). $\pm 2\sqrt{2}$ 3). 27 4). $3, -\frac{3}{2}$.

144. 1). $\log_{\frac{3}{2}} \frac{7}{5}$ 2). $\log_{0.9} \frac{13}{7}$ 3). $\log_{\frac{2}{27}} \frac{2}{5}$ 4). $\log_{\frac{3}{8}} \frac{5}{8}$.

145. 1). 3 2). 5 3). 3 4). 1 5). 3 6). 5.

146. 1). 2 2). 3 3). $1, 3$ 4). $1, 2$.

147. 1). $-2, 1$ 2). $-2, 1$ 3). ± 1 4). 2. 148. 1). $10^{-1}, 10^3$
2). $\frac{1}{2}, 16$ 3). $\frac{1}{2}$ 4). $10, 10^4$ 5). $\pm\frac{2}{3}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}$ 6). $\frac{1}{4}, 2^{\pm\sqrt{2}}, 4$.

149. 1). ± 4 2). 2 3). ± 2 4). ± 4.

150. 1). $9, 1/\sqrt[3]{3}$ 2). $25, 125$ 3). $\frac{1}{2}, 2^{5/4}$ 4). $100, 10^{-1/9}$

5). $4, 2^{-9/4}$ 6). $\frac{1}{3}, 1, 3^{-7/8}$.
151. 1). $(12, 1)$ 2). $\{(1;2), (2.5;1)\}$ 3). $(5;1)$ 4). $\{(1;3), (\frac{7}{3}, 1)\}$.
152. 1). $(-\infty; -3)$ 2). $(-\infty; -\frac{1}{9}]$ 3). $(-15; +\infty)$ 4). $(-1; 0)$
5). $[0; 2]$ 6). $[-\frac{11}{7}; 2]$ 7). $[2; +\infty)$ 8). $(-\infty; 1]$
9). $(0.1; 100) \cup (1000; +\infty)$ 10). $(\frac{1}{2}; 2)$.
153. 1). $[\frac{7}{2}; +\infty)$ 2). $(-4; 23]$ 3). $[\frac{3}{4}; \frac{5}{4})$ 4). $(\frac{7}{9}; \frac{34}{9})$
5). $[\frac{1}{3}; 1) \cup (\frac{7}{3}; 3]$ 6). $[-8; -7) \cup (1; 2]$.
154. 1). $[\frac{17}{32}; 1)$ 2). $[-2; 0)$ 3). $(-6; 1)$ 4). $(\frac{1}{3}; \frac{5}{8})$.
155. 1). $(0; 2) \cup (5; 8]$ 2). $(-1; \frac{1}{3}]$ 3). $(0; 1) \cup (2; 3] \cup [9; +\infty)$
4). $(-1; 0) \cup [2; 3]$.
156. 1). $(2; 17]$ 2). $(1; \frac{7}{4}]$ 3). $[\frac{9}{16}; 1)$ 4). $(-\infty; 1) \cup [\frac{13}{9}; \frac{3}{2})$.
157. 1). $(-2; 0) \cup [2; 3]$ 2). $(-3; 0) \cup [\frac{1}{2}; 1]$ 3). $(-2; 0) \cup (0; \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$
4). $[-5; 0) \cup (0; \frac{1}{4}) \cup [1; +\infty)$.

Глава 5

Тригонометрия.

5.1 Основные понятия.

В декартовой системе координат положение точки M на плоскости однозначно определяется координатами x и y, что пишут как $M = (x, y)$. Но возможен и другой способ: достаточно указать расстояние до центра координат и угол, образованный фиксированной осью и лучом, проходящим через заданную точку и начало координат. Угол вычисляется либо, в градусах либо в радианах. (Угол в радианах – это длина дуги единичной окружности, содержащей этот угол.) Связь между угловыми мерами в радианах и градусах даётся формулами:

$$\alpha_{\text{рад.}} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha_{\text{град.}}, \qquad \alpha_{\text{град.}} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha_{\text{рад.}}. \tag{5.1}$$

Например, 90 градусов это $\pi \cdot 90^\circ / 180^\circ = \pi/2$ радиан.

Чтобы подчеркнуть, что точка находится на единичной окружности, к указанию координат можно добавить слова – «точка находится на единичной окружности». Но можно поступить иначе. Пусть $(1; 0)$ – *начальное положение*. Тогда координаты точки, находящейся на единичной окружности и повёрнутой из начального положения на угол α относительно оси OX, будем обозначать специальным образом: $x_\alpha = \cos\alpha$ (*косинус* α), $y_\alpha = \sin\alpha$ (*синус* α). Таким образом положение точки M на единичной окружности может быть записано как $(x_\alpha; y_\alpha)|_{R=1}$ или $M_\alpha = (\cos\alpha; \sin\alpha)$ (рис. 17.).

рис. 17.

Договоримся о знаке угла поворота. Пусть положительное значение угла соответствует повороту против часовой стрелки, а отрицательное – по часовой стрелке (рис. 18.). Так как для каждого значения угла α имеется только одно значение x_α и y_α, то координаты $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ можно рассматривать как функции угла. Эти функции и функции, с помощью

рис. 18.

них образованные, называются *тригонометрическими функциями.*

Частное $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ обозначается как $\operatorname{tg}\alpha$, а частное $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ – как $\operatorname{ctg}\alpha$. Значения $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ могут быть представлены геометрически: через точки C и D проведём числовые оси, перпендикулярные OX и OY (рис. 19.)

рис. 19.

Из подобия $\triangle MOA$ и $\triangle FOC$ следует: $|FC|/|MA| = |OC|/|OA|$. Но $|OC| = 1, |OA| = \cos\alpha, |MA| = \sin\alpha$, поэтому $|FC| = |OC|\cdot|MA|/|OA| = 1\cdot\sin\alpha/\cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha$. Аналогично, из подобия треугольников MOB и KOD следует, что $|KD|/|MB| = |OD|/|OB|$, откуда $|KD| = \operatorname{ctg}\alpha$. При этом отрицательные значения $\operatorname{tg}\alpha$ находятся ниже точки C, а отрицательные значения $\operatorname{ctg}\alpha$ – левее точки D (рис. 19).

Из определений $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ при $\alpha \neq 90°n, n \in Z$ следуют формулы:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha = 1/\operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}\alpha = 1/\operatorname{tg}\alpha.$$

Графики тригонометрических функций можно построить по

1). 2).

точкам (рис. 20:

1). $y = \sin x$
2). $y = \cos x$
3). $y = \operatorname{tg} x$
4). $y = \operatorname{ctg} x$)

3). рис. 20. 4).

5.2 Свойства тригонометрических функций.

Чётность. При повороте точки $M = (1;0)$ на угол α или угол $-\alpha$, как видно из рис. 18, проекция точки на ось OX не изменится, поэтому $x_{-\alpha} = x_\alpha$, следовательно $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, то есть функция $y = \cos x$ – чётная, а проекции на ось OY различаются знаком, и $y_{-\alpha} = -y_\alpha$ или $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, поэтому $y = \sin x$ – нечётная функция. Из определений $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ следует, что функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ – также нечётные.

Периодичность. При повороте точки $M = (1;0)$ на углы α или $\alpha + 360°n$ (n – целое число) проекция точки на оси OX и OY останутся без изменений, поэтому $\cos(\alpha + 360°n) = \cos\alpha$ и $\sin(\alpha + 360°n) = \sin\alpha$, то есть функции $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ – ***периодические***, с периодом 360 градусов.

Из рис. 19 и определений тангенса и котангенса следует, что функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ – ***периодические***, с периодом $180°$, то есть $\operatorname{tg}(\alpha+180°n) = \operatorname{tg}\alpha$
и $\operatorname{ctg}(\alpha + 180°n) = \operatorname{ctg}\alpha$.

Заметим, что для углов $(90°;270°)$ значения $\operatorname{tg}\alpha$ находятся опять же на числовой прямой CF, а на числовой прямой DK – значения $\operatorname{ctg}\alpha$ для углов $(180°;360°)$ как на рис. 21.

рис. 21.

Знаки тригонометрических функций. Принято нумеровать четверти системы координат против часовой стрелки, как показано на рис. 22, где римские цифры указывают номер четверти. Из определений $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ как проекций на соответствующие оси следуют знаки числовых значений соответствующих тригонометрических функций (рис. 23). Из определения тангенса и котангенса и знаков синуса и косинуса в различных квадрантах следуют знаки для тангенса и котангенса (рис. 23):

рис. 22.

$\sin\alpha$ $\cos\alpha$ рис. 23. $\operatorname{tg}\alpha$ $\operatorname{ctg}\alpha$

Пример 105. Расположить в порядке возрастания $\sin 1, \cos 1, \operatorname{tg} 1, \operatorname{ctg} 1$, если угол указан в радианах.

Решение. Отметим значения требуемых тригонометрических функций на чертеже (рис. 24), учитывая, что 1 радиан составляет примерно $2/3$ первой четверти (около 57° в соответствии с формулой (5.1)). Сравнивая длины выделенных отрезков, заметим, что $\operatorname{ctg} 1 > \cos 1$, а $\operatorname{tg} 1 > \sin 1$. Видно также, что $\operatorname{ctg} 1 < \sin 1$, хотя для этого необходим хороший черчёж. Таким образом: $\cos 1 < \operatorname{ctg} 1 < \sin 1 < \operatorname{tg} 1$.

рис. 24.

Ответ: $\cos 1, \operatorname{ctg} 1, \sin 1, \operatorname{tg} 1$.

Пример 106. Расположить в порядке возрастания $\sin 1, \sin 3, \sin 7$, если угол указан в радианах.

Решение. Учитывая, что $\pi \approx 3.14$ и $\pi/2 \approx 1.57$, отметим углы 1, 3 и 7 на единичной окружности (рис. 25). Сравнивая длины выделенных дуг, из рисунка видим, что: $\sin 3 < \sin 7 < \sin 1$. То, что $\sin 7 < \sin 1$ следует и из алгебраических расчётов, так как $\sin 7 - \sin 1 = 2 \underset{(+)}{\sin 3} \underset{(-)}{\cos 4} < 0$ (углы 3 и 4 радиан находятся во II и III четвертях). Другой способ решения задачи – перевод радианной меры в градусную: 1 рад. $\approx 57^\circ$, 3 рад. $\approx 171^\circ = 180^\circ - 9^\circ$, 7 рад. $\approx 399^\circ = 360^\circ + 39^\circ$. Ответ: $\sin 3, \sin 7, \sin 1$.

рис. 25.

5.3 Значения тригонометрических функций.

Из рис. 17 следует, что $x_\alpha^2 + y_\alpha^2 = |OM_\alpha|^2$ но $|OM_\alpha| = 1$, поэтому

$$\cos\alpha^2 + \sin^2\alpha = 1$$

– основное тригонометрическое тождество.

Пусть $\alpha = 45^\circ$, тогда видим (рис. 17), что треугольник $OM_\alpha x_\alpha$ равнобедренный и $|Ox_\alpha| = |Oy_\alpha|$. Следовательно $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$. Подставим это равенство в основное тригонометрическое тождество: $\cos^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ = \cos^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 2\cos^2 45^\circ = 1$. Откуда $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$.

Пусть теперь $\alpha = 30^\circ$. Достроим треугольник $OM_\alpha x_\alpha$ до треугольника $OM_\alpha M_{-\alpha}$ (рис. 18). Видим, что угол $M_\alpha OM_{-\alpha}$ равен 60 градусам, а так как треугольник $M_\alpha OM_{-\alpha}$ равнобедренный, то он и равносторонний. Следовательно, длина $M_\alpha OM_{-\alpha} = 1$ или $2\sin 30^\circ = 1$. Откуда находим, $\sin 30^\circ = 1/2$. Из основного тригонометрического тождества и определений синуса, косинуса, тангенса и котангенса получим все остальные значения тригонометрических функций, которые запишем в таблицу на стр. 76.

Пример 107. Найти $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -1/3$ и $\alpha \in (270°; 360°)$.

Решение. Из основного тригонометрического тождества следует, что: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Так как в четвёртой четверти $\cos\alpha$ положителен, то $\cos\alpha = \sqrt{1-1/9} = 2\sqrt{2}/3$. Ответ: $2\sqrt{2}/3$.

$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\alpha_{\text{рад.}}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0	–

Пример 108. Расположить в порядке возрастания: $\sin 20° + \sin 75°, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}$. Решение. Проверим, что $\sqrt{3}/2 < 1$, возведя обе части неравенства в квадрат: $3/4 < 1$ – верно. Так как функция $y = \sin x$ возрастающая, то $\sin 75° > \sin 70°$ поэтому,

$\sin 20° + \sin 75° > \sin 20° + \sin 70° > \sin 20° \cos 70° + \sin 70° >$
$> \sin 20° \cos 70° + \sin 70° \cos 20° = \sin 90° = 1$.

(Так как при умножении некого положительного числа A на положительное число, меньшее единицы, число A может только уменьшиться, то: $\sin 20° > \sin 20° \cdot \cos 70°$ и $\sin 70° > \sin 70° \cdot \cos 20°$.) Таким образом, $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1 < \sin 20° + \sin 75°$. Ответ: $\sqrt{3}/2, 1, \sin 20° + \sin 75°$.

5.4 Формулы приведения.

Повернём точку M из начального положения $(1; 0)$ на угол α (пусть $0 < \alpha < 90°$) и построим треугольник AOM_α (рис. 26). Затем повернём точку M на угол $90° + \alpha$ и построим треугольник $COM_{90°+\alpha}$.

Из рассмотрения этих треугольников (рис. 26.) видно, что, во-первых, равны длины $|OA|$ и $|OC|$ и $|AM_\alpha|$ и $|CM_{90^\circ+\alpha}|$; во-вторых, знаки проекций x_α и $y_{\alpha+90^\circ}$ равны, а знаки проекций y_α и $x_{90^\circ+\alpha}$ противоположны, поэтому

$$\cos(90^\circ+\alpha) = -\sin\alpha, \quad \sin(90^\circ+\alpha) = \cos\alpha. \tag{5.2}$$

(Нетрудно убедиться, что формулы справедливы для произвольных углов.) Аналогично убеждаемся, что при повороте на углы α и $180^\circ+\alpha$ знаки $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ меняются на противоположные – это следует из рассмотрения треугольников на рис. 27:

$$\cos(180^\circ+\alpha) = -\cos\alpha, \sin(180^\circ+\alpha) = -\sin\alpha. \tag{5.3}$$

рис. 26.

Равенства (5.2 – 5.3) называются *формулами приведения*. Формулы приведения для других углов могут быть получены с помощью (5.2 – 5.3) и использованием чётности, например: $\cos(90^\circ-\alpha) = \cos(90^\circ+(-\alpha)) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha$. В результате получим таблицу.

рис. 27.

f, α	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$	$180^\circ+\alpha$	$270^\circ-\alpha$	$270^\circ+\alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
ctg	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$

Пример 109. Вычислить $f(\dfrac{23\pi}{6})$, если $f(x) = \cos 2x\cdot\sin x + \sqrt{3}\cdot\operatorname{tg} x$.
Решение. $f(\dfrac{23\pi}{6}) = \cos\dfrac{23\pi}{3}\sin\dfrac{23\pi}{6} + \sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{23\pi}{6}$.
Найдём все значения тригонометрических функций, входящих в $f(x)$:
$\sin 23\pi/6 = \sin(4\pi-\pi/6) = \sin(-\pi/6) = -\sin\pi/6 = -1/2$.
$\cos 23\pi/3 = \cos(8\pi-\pi/3) = \cos(-\pi/3) = \cos\pi/3 = 1/2$.
$\operatorname{tg} 23\pi/6 = \operatorname{tg}(4\pi-\pi/6) = \operatorname{tg}(-\pi/6) = -\operatorname{tg}\pi/6 = -\sqrt{3}/3$.
Откуда $f(\dfrac{23\pi}{6}) = \dfrac{1}{2}\cdot(-\dfrac{1}{2}) - \sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3} = -\dfrac{5}{4}$. Ответ: $-5/4$.

5.5 Тригонометрические преобразования.

Формулы преобразования тригонометрических функций. При преобразовании тригонометрических выражений необходимо знать формулы, вывод которых прост в курсе высшей математике, но трудоёмок в элементарной математике, поэтому приведу их без какой-либо аргументации.

I. Формулы двойного угла:

1.	$\cos 2\alpha$	$=$	$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$	4.	$\sin 2\alpha$	$=$	$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
2.	$\cos 2\alpha$	$=$	$1 - 2\sin^2\alpha$	5.	$\operatorname{tg} 2\alpha$	$=$	$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$
3.	$\cos 2\alpha$	$=$	$2\cos^2\alpha - 1$	6.	$\operatorname{ctg} 2\alpha$	$=$	$\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$

II. Формулы половинного угла следуют из формул двойного угла:

1. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ 3. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

2. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ 4. $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$

III. Формулы понижения степени следуют из формул I:

1. $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ 2. $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

IV. Формулы суммы:

1. $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
2. $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
3. $\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ 4. $\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\mp 1}{\operatorname{ctg}\beta\pm\operatorname{ctg}\alpha}$

V. Формулы сумм тригонометрических функций следуют из IV:

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
4. $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$
5. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ 6. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

VI. Формулы произведений тригонометрических функций (из IV):

1. $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$
2. $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$
3. $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$.

Формула вспомогательного угла. Пусть дано выражение: $a\sin\alpha + b\cos\alpha$, где $a^2+b^2\neq 0$. Домножим и разделим его на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha) \stackrel{*}{=}$

Но $|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}| \leqslant 1$, поэтому можно подобрать угол φ, что $a/\sqrt{a^2+b^2} = \cos\varphi$. С другой стороны, $\sin\varphi = \pm\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \pm\sqrt{1-(a/\sqrt{a^2+b^2})^2} =$

$\pm b/\sqrt{a^2+b^2}$, поэтому

$\overset{*}{=}$ $\sqrt{a^2+b^2}\cdot$ $(\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi)$. Выбирая $\sin\varphi = b/\sqrt{a^2+b^2}$, получим *формулу вспомогательного угла*:

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi), \qquad (5.4)$$

где $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Пример 110. Найти множество значений $f(x) = 3\sin x + 4\cos x + 2$.

Решение. Используя формулу вспомогательного угла (5.4), получим: $3\sin x + 4\cos x = 5\sin(x+\varphi)$. Но из графика функции $\sin x$ следует, что $|\sin(x+\varphi)| \leqslant 1$ (рис. 28.), поэтому

$-1 \leqslant \sin(x+\varphi) \leqslant 1 \quad \cdot 5$

$-5 \leqslant 5\sin(x+\varphi) \leqslant 5 \quad +2$

$-3 \leqslant 5\sin(x+\varphi) + 2 \leqslant 7$,

то есть $-3 \leqslant f(x) \leqslant 7$. Ответ: $[-3; 7]$.

рис. 28.

5.6 Обратные тригонометрические функции.

Функция $f(x) = \sin x$ не имеет обратной, так как она не взаимнооднозначна. В частности, $\sin\pi/6 = \sin 5\pi/6 = 1/2$. Но, если ограничить О. Д. З. множеством $[-\pi/2; \pi/2]$, то $f(x) = \sin x$ взаимнооднозначна, поэтому имеет обратную, обозначаемую как $\arcsin x$. Аналогично функция $f(x) = \cos x$, при $x \in [0; \pi]$ также обратима и $f^{-1}(x) = \arccos x$. Для $f(x) = \operatorname{tg} x, x \in (-\pi/2; \pi/2)$ будет $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$ и для $f(x) = \operatorname{ctg} x, x \in (0; \pi)$: $f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x$.

В соответствии с общей теорией обратной функции значение обратной тригонометрической функции определяется по исходной. Например, $\arcsin\frac{1}{2}$ это такой угол в промежутке $[-\pi/2; \pi/2]$, синус которого равен $1/2$. Следовательно $\arcsin\frac{1}{2} = \pi/6$. И т. д.

Пример 111. Вычислить $\sin\operatorname{arctg}(-2)$.

Решение. Обозначим $\alpha = \operatorname{arctg}(-2)$. Из определения $\operatorname{arctg} x$ следует, что $\operatorname{tg}\alpha = -2$ и $\alpha \in$ IV четверти. Необходимо найти $\sin\alpha$. Делим основное тригонометрическое тождество на $\sin^2\alpha$ (на то, что необходимо найти):

$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, но $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\dfrac{1}{2}$, поэтому $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = \dfrac{5}{4}$ и

$\sin^2\alpha = \dfrac{4}{5}$. Так как $\alpha \in$ IV четверти, то $\sin\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Ответ: $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Пример 112. Вычислить $\arcsin\cos(23.1\pi)$.

Решение. Угол 23.1π не попадает в О. Д. З. обратимости тригонометрических функций, к тому же приведём $\cos\alpha$ к $\sin\alpha$: $\cos(23.1\pi) = \cos(23.1\pi - 24\pi) = \cos(-0.9\pi) = \cos 0.9 = \sin(0.5\pi - 0.9\pi) = \sin(-0.4\pi)$. Так как $-0.4\pi \in [-\pi/2; \pi/2]$, то угол -0.4π находится в области обратимости $\sin x$, поэтому $\arcsin\cos(23.1\pi) = \arcsin\sin(-0.4\pi) = -0.4\pi$. Ответ: -0.4π.

5.7 Решение тригонометрических уравнений и неравенств.

В соответствии с рис. 29 уравнение $\sin x = a$ имеет решение $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z, \end{array}\right.$
которое может быть объединено в одну формулу:

$$\sin x = a, x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z.$$

рис. 29.

Из рис. 30 видим, что уравнение $\cos x = a$ имеет решение: при $n \in Z$ $x = \pm\arccos a + 2\pi n$.

Из рис. 31 видно, что уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решение: $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in Z$, и наконец, как следует из рис. 32, уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет решение $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in Z$.

рис. 30. рис. 31. рис. 32.

Пример 113. Решить уравнение: $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$, $x \in [180°; 540°]$.

Решение. Используя формулу вспомогательного угла (5.4), получим: $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x - \pi/3) = 1$.

Следовательно, $\left[\begin{array}{l} x - \pi/3 = \pi/6 + 2\pi n \\ x - \pi/3 = \pi - \pi/6 + 2\pi n \end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} x = 90° + 360° n \\ x = 210° + 360° n. \end{array}\right.$

Найдём решения, попадающие в заданный промежуток:
$n = 0 \left[\begin{array}{l} x = 90° \\ \underline{x = 210°}, \end{array}\right.$ $n = 1 \left[\begin{array}{l} \underline{x = 450°} \\ x = 570°, \end{array}\right.$ $n = 2 \left[\begin{array}{l} x = 810° \\ x = 930°. \end{array}\right.$ Ответ: $210°, 450°$.

Пример 114. Решить неравенство: $\sin(40^\circ - x) + \cos 70^\circ > 0, x \in [0^\circ; 360^\circ]$.

Решение. Запишем условие в виде $\sin(40^\circ - x) > -\cos 70^\circ$. Используя формулы приведения и чётности, сведём формулировку задачи к одной тригонометрической функции:

$-\cos 70^\circ = -\cos(90^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ = \sin(-20^\circ)$.

Таким образом: $\sin(40^\circ - x) > \sin(-20^\circ), x \in [0^\circ; 360^\circ]$.

На единичной окружности отметим угол -20°: точка A на рис. 33. Через точку A проведём перпендикуляр к оси OY и отметим точки B и C.

Внутри единичной окружности, на оси OY, заданному неравенству удовлетворяют все y_α, большие $\sin(-20^\circ)$ – полуинтервал $(B; D]$, отвечающий дуге $\smile{AC}$, выделенной на рис. 33. Из рис. 33 видно, что

$-20^\circ + 360^\circ n < 40^\circ - x < 200^\circ + 360^\circ n$

$-60^\circ + 360^\circ n < -x < 160^\circ + 360^\circ n$

$60^\circ - 360^\circ n > x > -160^\circ - 360^\circ n$. Перебирая различные n, найдём решения, входящие в область задания (рис. 34).

Ответ: $[0^\circ; 60^\circ) \cup (200^\circ; 360^\circ]$.

рис. 33.

рис. 34.

Пример 115. Решить уравнение при $x \in [-1; 0]$: $\sin(\pi(x-1)) = \cos 30^\circ$.

Решение. Уравнение $\sin(\pi(x-1)) = \cos 30^\circ$ равносильно $\sin(\pi(x-1)) = \cos 30^\circ$. Заменим в уравнении π на 180°, что равносильно переходу от радианной к градусной мере. В соответствии с определением синуса (см. рис. 35) решения имеют вид:

рис. 35.

$$\left[\begin{array}{l} 180^\circ(x-1) = 60^\circ + 360^\circ n \\ 180^\circ(x-1) = 120^\circ + 360^\circ n \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 3(x-1) = 1 + 6n \\ 3(x-1) = 2 + 6n \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{4}{3} + 2n \\ x = \frac{5}{3} + 2n. \end{array}\right.$$

Видно, что только при $n = -1$ решения попадают на отрезок $[-1; 0]$, откуда $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = -\frac{1}{3}$. Ответ: $x = \{-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\}$.

Пример 116. Решить уравнение: $\arcsin x = \arccos \dfrac{7}{25}$.

Решение. Сделаем оценку правой части: $\alpha = \arccos \frac{7}{25} \in I$ четверти. Найдём синус левой и правой частей уравнения. Так как $\sin \arcsin x = x$ и $\alpha \in$ первой четверти, то $x = \sin \arccos \frac{7}{25} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - (\frac{7}{25})^2} = \frac{24}{25}$. Ответ: $x = \frac{24}{25}$.

В последнем примере потребовалась оценка правой части, так как из равенства $\sin\alpha = \sin\beta$ не следует, что $\alpha = \beta$. Но, зная что как угол α, так и угол β принадлежат промежутку $[0; \frac{\pi}{4}]$, из равенства синусов углов следует равенство самих углов. (Заметим, что только из оценки углов левой и правой частей уравнение $\arcsin x = \arccos(-\frac{1}{2})$ не имеет решений.)

Пример 117. Решить неравенство: $\arccos x > \pi/3$.

Решение. На единичной окружности отметим угол $\pi/3$ и на множестве значений $[0; \pi]$ функции $\arccos x$ укажем углы α, для которых $\alpha > \pi/3$ – выделенная дуга $\overset{\smile}{AB}$ на рис. 36.

На числовой оси OX отметим значения x, отвечающие выделенным углам α. Для этого из каждой точки

рис. 36.

выделенной дуги $\overset{\smile}{AB}$ проведём перпендикуляр к оси OX. В результате получим полуинтервал $[BC)$. Найдём значения x на концах полуинтервала: если $\arccos x = \pi$, то $x = -1$; если $\arccos x = \pi/3$, то $x = 1/2$. Ответ: $[-1; 1/2)$.

Пример 118. Решить неравенство: $\sin x < 1/2$ при $[360°; 720°]$.

Решение. На оси OY (рис. 37) отметим точку $1/2$. На множестве значений $[-1; 1]$ функции $\sin x$ укажем числа y_α, для которых $y_\alpha < 1/2$ – выделенная область $(CD]$. Через точку C проведём перпендикуляр AB к оси OY и на единичной окружности отметим углы α, отвечающие выделенным значениям y_α – выделенная дуга $\overset{\smile}{AB}$.

рис. 37.

Найдём значения углов выделенной дуги из заданного отрезка: движемся от угла $360°$, указанного в условии как начало отрезка $[360°; 720°]$: $\overset{\smile}{EB} = [360°; 390°)$, $\overset{\smile}{AE} = (510°; 720°]$. Ответ: $[360°; 390°) \cup (510°; 720°]$.

Пример 119. Решить систему: $\begin{cases} \cos x > -\sqrt{3}/2 \\ \sin x \geqslant -\sqrt{2}/2 \end{cases}$, $x \in [0°; 360°]$.

Решение. Решаем неравенство $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$, отмечая область решений внутри единичного круга – дуга $\overset{\smile}{CD}$. Затем решаем неравенство $\sin x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ – дуга $\overset{\smile}{FE}$ (рис. 38). Находим область совместной штриховки: дуги $\overset{\smile}{CE}$ и $\overset{\smile}{FD}$. Записываем ответ, двигаясь от точки M. Ответ: $[0°; 150°) \cup (210°; 225°] \cup [315°; 360°]$.

рис. 38.

Пример 120. Решить систему: $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leqslant 1 \\ \sin x > \frac{1}{2} \end{cases}, x \in [360^\circ; 720^\circ]$.

Решение. Решаем неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$ и отмечаем область решений внутри единичного круга – дуга $\overset{\smile}{DC}$. Затем решаем неравенство $\operatorname{tg} x \leqslant 1$ – дуги $\overset{\smile}{EF}$ и $\overset{\smile}{BA}$ вне круга (рис. 39). Находим область совместной штриховки: дуги $\overset{\smile}{DF}$ и $\overset{\smile}{BC}$. Записываем ответ, двигаясь от точки $M = 360^\circ$. Ответ: $(390^\circ; 405^\circ] \cup (450^\circ; 510^\circ)$.

рис. 39.

Пример 121. Решить уравнение: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

Решение. Группируем первый и последний члены равенства, второй и третий, используем формулу суммы тригонометрических функций:

$\sin x + \sin 4x + \sin 2x + \sin 3x = 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} =$
$= 2\sin\frac{5x}{2}(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}) = 4\sin\frac{5x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2} = 0$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{lll} \sin\frac{5x}{2} = 0, & 5x/2 = \pi n, & x = 2\pi n/5, \\ \cos x = 0, & x = \pi/2 + \pi n, & \\ \cos\frac{x}{2} = 0, & x/2 = \pi/2 + \pi n, & x = \pi + 2\pi n. \end{array}\right.$$

Ответ: $2\pi n/5, \pi + 2\pi n, \pi/2 + \pi n, n \in Z$.

Пример 122. Решить уравнение: $2\sin^2 x - \sin x\cos x + 5\cos^2 x = 4$.

Решение. Заметим, что $4 = 4(\sin^2 x + \cos^2 x)$, или $2\sin^2 x - \sin x\cos x + 5\cos^2 x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x)$. Так как $\cos x = 0$ решением не является $(2 - 0 + 5\cdot 0 \neq 4)$, то разделим всё выражение на $\cos^2 x$: $2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 5 = 4\operatorname{tg}^2 x + 4$. Откуда $(\operatorname{tg} x)_{1,2} = (-1 \pm 3)/4$, $\left[\begin{array}{ll} \operatorname{tg} x = -1, & x = -\pi/4 + \pi n \\ \operatorname{tg} x = 1/2, & x = \operatorname{arctg} 1/2 + \pi n. \end{array}\right.$

Ответ: $x = -\pi/4 + \pi n, x = \operatorname{arctg} 1/2 + \pi n, n \in Z$.

Пример 123. Решить уравнение: $\sin x \cdot \cos 4x = 1$.

Решение. Преобразуем произведение в сумму:

$\sin x \cdot \cos 4x = \dfrac{1}{2}(\sin 5x - \sin 3x) = 1$ или $\sin 5x - \sin 3x = 2$.

Видим, что заданное уравнение выполняется только при условии, если: $\sin 5x = 1$ и $\sin 3x = -1$. Следовательно

$$\begin{cases} 5x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, & x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi n}{5} \quad (1) \\ 3x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, & x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3} \quad (2) \end{cases}$$

Отметим найденные решения на единичной окружности: для (1) в виде кружочков и для (2) – в виде квадратиков (рис. 40).

рис. 40.

Из рис. 40 видим, что решения (1) и (2) пересекаются только при $x = \pi/2 + 2\pi n$. Ответ: $x = \pi/2 + 2\pi n, \quad n \in Z$.

В предыдущей задаче использовалась единственность решения. При решении некоторых других тригонометрических задач полезно их геометрическое представление. Рассмотрим одну из таких.

На единичной окружности отметим точки $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$, образующих правильный многоугольник. Докажем, что

$$\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \ldots + \overrightarrow{OA}_{2n+1} = 0, \qquad (5.5)$$

где O – центр окружности. Пусть это не так, тогда сумма (5.5) равна некоторому вектору $\vec{a} \neq 0$. Но при повороте окружности вокруг точки O на угол $2\pi/(2n+1)$ картинка должна перейти в себя, тем не менее вектор $\vec{a}$ перейдёт в $\vec{a}'$. Противоречие показывает, что $\vec{a} = 0$.

рис. 41.

Так как сумма векторов равна нулю, то равна нулю и сумма проекций этих векторов на оси координат. Пусть точка A_1 находится в начальном положении $(1;0)$. Тогда $\cos 0 + \cos\frac{2\pi\cdot 1}{2n+1} + \cos\frac{2\pi\cdot 2}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2\pi\cdot 2n}{2n+1} = 0$.

В силу симметрии рисунка 41 и чётности $\cos x$ получим:

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}. \qquad (5.6)$$

Пример 124. Вычислить: $\cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5}$.

Решение (I – способ). Задание соответствует частному случаю (5.6) при $n = 2$. Следовательно $\cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5} = -\dfrac{1}{2}$. Ответ: $-1/2$.

Решение (II – способ). Такие примеры решаются домножением и одновременно делением выражения на синус наименьшего угла с последующим использованием формул произведения тригонометрических функций:

$$\frac{\sin 2\pi/5(\cos 2\pi/5 + \cos 4\pi/5)}{\sin 2\pi/5} = \frac{\sin 4\pi/5 + \sin 6\pi/5 - \sin 2\pi/5}{2\sin 2\pi/5} =$$
$$\frac{\sin(\pi - 4\pi/5) + \sin(\pi - 6\pi/5) - \sin 2\pi/5}{2\sin 2\pi/5} = \frac{-\sin 2\pi/5}{2\sin 2\pi/5} = -\frac{1}{2}.$$

5.8 Задания.

158. Используя единичную окружность, доказать:

1). $\sin(270^\circ+\alpha)=\sin(270^\circ-\alpha)$ 3). $\sin(90^\circ+\alpha)=\sin(90^\circ-\alpha)$
2). $\cos(180^\circ+\alpha)=\cos(180^\circ-\alpha)$ 4). $\cos(360^\circ+\alpha)=\cos(360^\circ-\alpha)$

159. Пусть $f(x)=2\cos x\sin 2x-\sqrt{3}\operatorname{tg}x\cos 2x$. Найти:
1). $f(31\pi/6)$ 2). $f(29\pi/6)$ 3). $f(19\pi/6)$ 4). $f(17\pi/6)$
5). $f(2010^\circ)$ 6). $f(1305^\circ)$ 7). $f(1680^\circ)$

160. Найти:
1). $\cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=-1/3$ и $\alpha\in(\pi;3\pi/2)$
2). $\sin\alpha, \operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha=-1/4$ и $\alpha\in(\pi;3\pi/2)$
3). $\sin\alpha, \cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-3$ и $\alpha\in(\pi/2;\pi)$
4). $\sin\alpha, \cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-2$ и $\alpha\in(3\pi/2;2\pi)$

161. Вычислить:
1). $\sin\arccos\frac{4}{5}$ 3). $\cos\arcsin(-\frac{3}{5})$ 5). $\operatorname{tg}\arcsin\frac{2}{3}$
2). $\sin\operatorname{arctg}(-3)$ 4). $\cos\operatorname{arctg}(-2)$ 6). $\operatorname{ctg}\arccos\frac{1}{3}$

162. Вычислить:
1). $\arcsin\sin 13.4\pi$ 3). $\arccos\sin 7.2\pi$ 5). $\arcsin\cos 19.8\pi$
2). $\arccos\sin 13.4\pi$ 4). $\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}13.9\pi$ 6). $\operatorname{arcctg}\operatorname{tg}33.6\pi$
7). $\arcsin\cos 580^\circ$ 9). $\arccos\sin(-200^\circ)$ 11). $\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}500^\circ$
8). $\arccos\sin 650^\circ$ 10). $\arcsin\cos(-130^\circ)$ 12). $\operatorname{arcctg}\operatorname{tg}(-320^\circ)$

163. Пусть $\sin x+\cos x=-\frac{2}{3}$. Найти:
1). $\sin x\cdot\cos x$ 3). $\sin^3x+\cos^3x$
2). $\sin^4x+\cos^4x$ 4). $\cos x-\sin x$

164. Расположить в порядке возрастания:
1). $\sin 2, \cos 2, \operatorname{tg}2, \operatorname{ctg}2$ 3). $\sin 3, \cos 3, \operatorname{tg}3, \operatorname{ctg}3$ 5). $\sin 2, \sin 7, \sin 8$
2). $\sin 6, \cos 6, \operatorname{tg}6, \operatorname{ctg}6$ 4). $\sin 8, \cos 8, \operatorname{tg}8, \operatorname{ctg}8$ 6). $\cos 3, \cos 4, \cos 9$
7). $\sin 260^\circ, \cos 205^\circ, \cos 171^\circ, \sin 301^\circ$
8). $\sin 322^\circ, \cos 156^\circ, \cos 196^\circ, \sin 225^\circ$
9). $\cos 296^\circ, \sin 164^\circ, \sin 385^\circ, \cos 404^\circ$

165. Вычислить:
1). $\sin(2\arcsin 1/3)$ 4). $\cos(\arcsin 2/3-\pi/4)$
2). $\cos(2\arcsin(-1/3))$ 5). $\sin(2\operatorname{arctg}1/2+\pi/6)$
3). $\cos(2\operatorname{arctg}2)$ 6). $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\sqrt{3}/2-\pi/3)$

166. Вычислить:
1). $\dfrac{\pi-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{6}+\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})}$ 2). $\dfrac{\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}}{\operatorname{arctg}1-\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})}$

167. Решить уравнение:

1). $\arccos x = \arcsin\dfrac{16}{65}$ 4). $\arcsin x + \arcsin 2x = \dfrac{\pi}{2}$
2). $\arcsin 2x - 2\arcsin x = 0$ 5). $\arccos 2x + 2\arcsin x = 0$
3). $\arccos 2x - 2\arcsin x = 0$ 6). $\arccos x + \arccos 2x = \pi$

168. Решить неравенство:
1). $\arcsin x < \pi/4$ 3). $\arccos x > \pi/6$ 5). $\arcsin x > 0$
2). $\operatorname{arcctg} x > \pi/3$ 4). $\operatorname{arctg} x \leqslant \pi/4$ 6). $\arccos x \leqslant 0$

169. Решить неравенство:
1). $\dfrac{\pi}{\pi/6 - \arcsin x} \leqslant 1$ 2). $\dfrac{\pi}{\pi/3 - \arccos x} \geqslant 1$
3). $\dfrac{4}{\pi - 3\arccos x} \leqslant 1$ 4). $\dfrac{\pi}{\pi/4 - \arcsin x} \geqslant 1$

170. Решить неравенство:
1). $\arcsin(\sqrt{x-4} - 3) < 0$ 3). $\arccos(3 - \sqrt{x-1}) \leqslant 0$
2). $\arcsin(\sqrt{2x+1} - 2) < 0$ 4). $\arcsin(2 - \sqrt{x-3}) > 0$

171. Доказать, что:
1). $\sin 20^\circ + \cos 20^\circ > 1$ 3). $\sin 15^\circ + \sin 20^\circ > 1/2$
2). $\sin 10^\circ + \cos 70^\circ > 1/2$ 4). $\cos 55^\circ + \cos 80^\circ > \sqrt{2}/2$

172. Преобразовать в произведение:
1). $2\cos x - 1$ 2). $\sin^2 x - 3/4$ 3). $\cos x - \sin x$
4). $\sin x - \sqrt{3}\cos x - 2$ 5). $5\sin 4x - 3\cos 2x - 4\sin 2x$
6). $13\cos x + 12\sin 3x - 5\cos 3x$ 7). $\cos 2x + \sin x + \cos x$

173. Решить неравенство:
1). $\sin x < \frac{1}{2}$ 3). $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 5). $|\sin x| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$
2). $\operatorname{ctg} x > -\sqrt{3}$ 4). $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$ 6). $|\operatorname{tg} x| \geqslant 1$

174. Решить неравенство:
1). $\dfrac{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{\sin x - \sqrt{3}} \geqslant 0$, при $x \in (-180^\circ; 180^\circ)$
2). $\dfrac{2\sin x - \sqrt{2}}{\cos x - \sqrt{2}} < 0$, при $x \in [90^\circ; 450^\circ]$

175. Решить неравенство на отрезке $x \in [0^\circ; 360^\circ]$:
1). $\sin(x - 5^\circ) \geqslant \sin 20^\circ$ 3). $\operatorname{tg}(x - 20^\circ) \leqslant \operatorname{tg} 10^\circ$
2). $\cos(x + 20^\circ) < \cos 10^\circ$ 4). $\operatorname{ctg}(x + 10^\circ) > \operatorname{ctg} 130^\circ$

176. Решить неравенство:
1). $\sin(10^\circ - x) \leqslant \sqrt{3}/2$, при $x \in [0^\circ; 360^\circ]$
2). $\cos(20^\circ + x) > -\sqrt{2}/2$, при $x \in [0^\circ; 360^\circ]$
3). $\operatorname{tg}(40^\circ - x) \leqslant \operatorname{tg} 20^\circ$, при $x \in (-50^\circ; 130^\circ)$
4). $\operatorname{ctg}(50^\circ - x) < \operatorname{tg} 30^\circ$, при $x \in (-130^\circ; 50^\circ)$
5). $\sin(5^\circ + x) + \cos 20^\circ > 0$, при $x \in [-90^\circ; 270^\circ]$
6). $\operatorname{tg}(x - 10^\circ) \geqslant \operatorname{ctg} 5^\circ$, при $x \in [0^\circ; 360^\circ]$
7). $\cos(15^\circ - x) < \sin 25^\circ$, при $x \in [90^\circ; 450^\circ]$

177. Решить неравенство на отрезке $x \in [0^\circ; 360^\circ]$:

1). $\dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}\leqslant 1$ 4). $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2\cos x}\geqslant 1$

2). $\dfrac{4}{\sqrt{2}-2\sin x}\leqslant 1$ 5). $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2\sin x}\leqslant 1$

3). $\dfrac{4}{1+2\sin x}\leqslant 1$ 6). $\dfrac{2}{1+2\cos x}\geqslant 1$

178. Решить систему неравенств:

1). $\begin{cases}\sin x\leqslant \dfrac{1}{2}\\ \cos x>-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ при $x\in[0°;360°]$ 2). $\begin{cases}\operatorname{tg} x\geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \operatorname{ctg} x>\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$ при $x\in[-90°;270°]$ 3). $\begin{cases}\cos x\geqslant -\dfrac{1}{2}\\ \operatorname{ctg} x<\sqrt{3}\end{cases}$ при $x\in[-180°;180°]$

179. Решить уравнение:

1). $\cos(x+90°)=-\sqrt{3}/2,$ при $x\in[-360°;0°]$
2). $\sin(x-270°)=1/2,$ при $x\in[0°;360°]$

180. Решить уравнение при $x\in[0;1]$:

1). $\cos(\pi(2x+1))=\sin 60°$ 3). $\sin(\pi(2x+3))=\cos 60°$
2). $\sin(\pi(2x-1))=\cos 30°$ 4). $\cos(\pi(2x-3))=\sin 30°$

181. Решить уравнение при $x\in[0°;360°]$:

1). $\cos(x+50°)-\sin 20°=0$ 3). $\sin(x-30°)+\cos 40°=0$
2). $\cos(x-60°)+\sin 50°=0$ 4). $\sin(2x+40°)+\cos 80°=0$

182. Решить уравнение:

1). $\sin 4x\cdot\operatorname{ctg} 2x=0$ 3). $(1-\cos x)\operatorname{ctg} x=0$
2). $(\operatorname{ctg} x+\sqrt{3})(\sin 2x-\sin x)=0$ 4). $(\sin x+1)\operatorname{tg} x=0$

183. Решить уравнение:

1). $\dfrac{\cos^2 4x(1+\operatorname{tg}^2 4x)}{3-4\sin^2 3x-\dfrac{5}{3}\cos^2 3x}=\dfrac{4}{3}$ 3). $\operatorname{ctg}(\dfrac{x}{4}-\dfrac{\pi}{9})=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

2). $\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$ 4). $\cos(\dfrac{\pi}{8}+3x)=0$

184. Решить уравнение:

1). $\cos 2x+\cos 4x=\cos 3x$ 3). $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$
2). $\sin 7x-\sin 3x=\sin 2x$ 4). $\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x=0$

185. Решить уравнение:

1). $\sin 3x\cdot\cos 5x-\cos 2x\cdot\sin 6x=0$ 3). $\cos 5x\cdot\sin x=\sin 2x\cos 4x$
2). $\cos 2x\cdot\cos 4x+\sin^2 3x=0$ 4). $\cos x\cdot\cos 3x-\cos^2 2x=0$

186. Решить уравнение:

1). $\sqrt{3}\sin x+\sin 2x=0$ на отрезке $x\in[180°;360°]$
2). $\sin 2x+\sqrt{2}\cos x=0$ на отрезке $x\in[90°;270°]$
3). $\cos x+\sin 2x=0$ на отрезке $x\in[180°;360°]$
4). $\sin x=\sin 2x$ на отрезке $x\in[0°;180°]$

187. Решить уравнение:
1). $2\cos^2 x + \cos 2x - 2 = 0$ при $x \in [0°; 180°]$
2). $3\cos 2x + 2\sin^2 x = 2$ при $x \in [180°; 360°]$
3). $4\cos 2x - 6\cos^2 x + 3 = 0$ при $x \in [90°; 270°]$
4). $2\cos 2x + 5\sin^2 x - 3 = 0$ при $x \in [180°; 360°]$

188. Решить уравнение:
1). $2\cos^2 x = -3\sin x$ 4). $2\cos^2 x + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{ctg}\, x \cos x = 2$
2). $\sqrt{2}\sin 4x = \mathrm{ctg}\, 4x$ 5). $4\cos^2(x + 270°) + (2 + \sqrt{8})\cos x = \sqrt{2} + 4$
3). $\sin x - \cos 2x = 0$ 6). $8\cos x + 2\sin^2 x - \sqrt{3}\cos x = 4\sqrt{3} - 1$

189. Решить уравнение:
1). $\sin x + \sin 3x + 4(\cos x - \sin x)\cos x = 0$
2). $\cos x - \sin x = \mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}\, x$
3). $\mathrm{tg}\, x + \sin x - 1 = \cos x$ 5). $\sin x + \cos 2x - \sin 3x = 1$
4). $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ 6). $\cos 5x + \cos x = \cos 2x$

190. Решить уравнение:
1). $\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin 2x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$
2). $\sin^2 x + (\sqrt{3} - 1)\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$
3). $5\sin^2 x - 2\sin 2x + \cos^2 x = 5$
4). $4\sin^2 x - 2\sin 2x - 2\cos^2 x = 3$
5). $4\sin^2 x - (1 + \sqrt{3})\sin x \cos x + \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)\cos^2 x = 3$

191. Решить уравнение:
1). $\sin x \cos 2x = -1$ 2). $\sin x \sin 3x = -1$ 3). $\sin 3x + \cos 2x = -2$

192. Вычислить:
1). $\cos 36° - \cos 72°$ 2). $\sin 18° \cdot \cos 36°$
3). $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$ 4). $\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}$

193. Решить уравнение:
1). $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1,$ при $x \in [-90°; 270°]$
2). $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3},$ при $x \in [0°; 360°]$
3). $2\cos 4x + \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 0,$ при $x \in [90°; 180°]$
4). $\cos 4x - \cos x \cos 3x = 1,$ при $x \in [0°; 360°]$
5). $3\sqrt{2}\sin x = \sin(\pi/4 + x),$ при $x \in [-\pi; 0]$
6). $\sin 5x - \cos 3x \sin 2x = 0$ при $x \in [0°; 90°]$
7). $5\sin x + 4\sin 3x + 3\cos 3x = 0,$ при $x \in [-\pi/2; \pi/2]$
8). $\sin 5x \cos x = \sin 4x \cos 2x,$ при $x \in [-\pi/2; \pi/2]$
9). $\cos x \cos 3x = \cos 4x,$ при $x \in [-\pi/2; \pi/2]$

194. Найти x на отрезке $[0°; 360°]$, при которых указанные числа образуют арифметическую прогрессию в той же последовательности:
1). $\cos\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\cos x, -1$ 2). $-\cos x, 1, \cos 2x$ 3). $\cos 2x, 8\sin x, 7.5.$

195. Найти x на отрезке $[0°; 360°]$, при которых указанные числа образуют геометрическую прогрессию в той же последовательности:
1). $1, \cos x, \sqrt{2}\sin x - \frac{1}{2}$ 2). $2, 2\cos x, \sqrt{3}\sin x - 1$ 3). $1, \frac{\cos x}{\sqrt{3}}, \frac{\sin x}{2}.$

Ответы.

159. 1). -2 2). 2 3). -2 4). 2 5). -2 6). $-\sqrt{2}$ 7). $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.
160. 1). $-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}$ 2). $-\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{\sqrt{15}}{15}$ 3). $\frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 4). $\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.
161. 1). $\frac{3}{5}$ 2). $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 3). $\frac{4}{5}$ 4). $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 5). $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 6). $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
162. 1). -0.4π 2). 0.9π 3). 0.7π 4). -0.4π 5). 0.3π 6).0.9π.
7). -50° 8). 160° 9). 70° 10). -40° 11). -50° 12). 50°.
163. 1). $-\frac{5}{18}$ 2). $\frac{137}{162}$ 3). $-\frac{23}{27}$ 4). $\pm\frac{\sqrt{14}}{3}$.
164. 1). $\operatorname{tg} 2, \operatorname{ctg} 2, \cos 2, \sin 2$ 3). $\operatorname{ctg} 3, \cos 3, \operatorname{tg} 3, \sin 3$ 5). $\sin 7, \sin 2 \sin 8$
2). $\operatorname{ctg} 6, \operatorname{tg} 6, \sin 6, \cos 6$ 4). $\operatorname{tg} 8, \operatorname{ctg} 8, \cos 8, \sin 8$ 6). $\cos 3, \cos 9, \cos 4$
7). $\cos 171^\circ, \sin 260^\circ, \cos 205^\circ, \sin 301^\circ$ 8). $\cos 196^\circ, \cos 156^\circ, \sin 225^\circ,$
$\sin 322^\circ$ 9). $\sin 164^\circ, \sin 385^\circ, \cos 296^\circ, \cos 404^\circ$.
165. 1). $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ 2). $\frac{7}{9}$ 3). $-\frac{3}{5}$ 4). $\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{2}}{6}$ 5). $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$ 6). $-\frac{\sqrt{3}}{5}$.
166. 1). $8/11$ 2). $-5/7$.
167. 1). $63/65$ 2). 0 3). $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 4). $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 5). $\varnothing$ 6). 0.
168. 1). $[-1; \sqrt{2}/2)$ 2). $(-\infty; \sqrt{3}/3)$ 3). $[-1; \sqrt{3}/2)$ 4). $(-\infty; 1]$
5). $(0; 1]$ 6). $x = 1$.
169. 1). $(\frac{1}{2}; 1]$ 2). $(\frac{1}{2}; 1]$ 3). $[-1; \frac{1}{2})$ 4). $[-1; \frac{\sqrt{2}}{2})$
170. 1). $[8; 13)$ 2). $[0.5; 1.5)$ 3). $x = 5$ 3). 4). $[4; 7)$
172. 1). $4\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})\sin(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2})$ 2). $\sin(x - \frac{\pi}{3})\sin(x + \frac{\pi}{3})$
3). $\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$ 4). $4\sin(\frac{x}{2} - \frac{5\pi}{12})\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})$
5). $10\sin(x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4})\cos(3x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4})$
6). $26\sin(x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{12}{5})\sin(2x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{12}{5})$
7). $4\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\cos\frac{x}{2}$
173. 1). $(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{13\pi}{6} + 2\pi n)$ 2). $(\pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n)$
3). $(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n)$ 4). $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n)$
5). $[-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n]$ 6). $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n] \cup [\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$.
174. 1). $(-180^\circ; -120^\circ] \cup (-90^\circ; 60^\circ] \cup (90^\circ; 180^\circ)$ 2). $[90^\circ; 135^\circ) \cup (405^\circ; 450^\circ]$.
175. 1). $[25^\circ; 165^\circ]$ 2). $[0^\circ; 330^\circ) \cup (350^\circ; 360^\circ]$
3). $[0^\circ; 30^\circ] \cup (110^\circ; 210^\circ] \cup (290^\circ; 360^\circ]$
4). $[0^\circ; 120^\circ) \cup (170^\circ; 300^\circ) \cup (350^\circ; 360^\circ]$.
176. 1). $[0^\circ; 250^\circ] \cup [310^\circ; 360^\circ]$ 2). $[0^\circ; 115^\circ) \cup (205^\circ; 360^\circ]$ 3). $[20^\circ; 130^\circ)$
4). $(-130^\circ; -10^\circ)$ 5). $(-75^\circ; 245^\circ)$ 6). $[95^\circ; 100^\circ) \cup [275^\circ; 280^\circ)$
7). $[90^\circ; 310^\circ) \cup (440^\circ; 450^\circ]$.
177. 1). $[0^\circ; 30^\circ) \cup (330^\circ; 360^\circ]$ 2). $(45^\circ; 135^\circ)$ 3). $(210^\circ; 330^\circ)$
4). $(30^\circ; 150^\circ] \cup [210^\circ; 330^\circ)$ 5). $[45^\circ; 135^\circ] \cup (225^\circ; 315^\circ)$
6). $[60^\circ; 120^\circ) \cup (240^\circ; 300^\circ]$.

178. 1). $[0°;30°] \cup (225°;360°]$ 2). $[30°;60°) \cup [210°;240°)$
3). $[-120°;0°) \cup (30°;120°]$.
179. 1). $-300°, -240°$ 2). $60°, 300°$.
180. 1). $\{\frac{5}{12};\frac{7}{12}\}$ 2). $\{\frac{2}{3};\frac{5}{6}\}$ 3). $\{\frac{7}{12};\frac{11}{12}\}$ 4). $\{\frac{1}{3};\frac{2}{3}\}$
181. 1). $20°, 240°$
2). $200°, 280°$, 3). $260°, 340°$ 4). $75°, 155°, 255°, 335°$.
182. 1). $\pi/4+\pi n/2$ 2). $\pm\pi/3+2\pi n, 5\pi/6+\pi n$ 3). $\pi/2+\pi n$ 4).πn.
183. 1). $\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, 2). $\frac{\pi}{6}+\pi n$ 3). $\frac{16\pi}{9}+4\pi n$ 4). $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{3}$.
184. 1). $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$ 2). $\frac{\pi n}{2}, \pm\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi n}{5}$
3). $\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$ 4). $\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{2\pi n}{7}, \pi+2\pi n$.
185. 1). $\frac{\pi n}{3}, \frac{\pi}{2}+\pi n$ 2). $\frac{\pi}{2}+\pi n$ 3). $\pi n, \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$ 4). πn
186. 1). $180°, 210°, 360°$ 2). $90°, 225°, 270°$ 3). $210°, 270°, 330°$
4). $0°, 60°, 180°$.
187. 1). $30°, 150°$ 2). $210°, 330°$ 3). $135°, 225°$ 4). $270°$.
188. 1). $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$ 2). $\pm\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}$ 3). $-\frac{\pi}{2}+2\pi n, (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$
4). $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$ 5). $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$ 6). $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$.
189. 1). $\frac{\pi}{2}+\pi n, \pi/4+(-1)^n\arcsin(1-\frac{\sqrt{2}}{2})+\pi n$
2). $\frac{\pi}{4}+\pi n, -\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin(1-\frac{\sqrt{2}}{2})+\pi n$ 3). $\pi+2\pi n, \frac{\pi}{4}+\pi n$
4). $\pi+2\pi n, \frac{2\pi n}{3}, \frac{\pi}{2}+\pi n$ 5). $\pi n, \frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3}$ 6). $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, \pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$.
190. 1). $\frac{\pi}{6}+\pi n, \frac{\pi}{3}+\pi n$ 2). $\frac{\pi}{4}+\pi n, -\frac{\pi}{3}+\pi n$ 3). $\frac{\pi}{2}+\pi n, -\frac{\pi}{4}+\pi n$
4). $-\frac{\pi}{4}+\pi n, \operatorname{arctg} 5+\pi n$ 5). $\frac{\pi}{4}+\pi n, \frac{\pi}{3}+\pi n$.
191. 1). $\frac{\pi}{2}+2\pi n$ 2). $\frac{\pi}{2}+\pi n$ 3). $\frac{\pi}{2}+2\pi n$.
192. 1). $\frac{1}{2}$ 2). $\frac{1}{4}$ 3). $-\frac{1}{2}$ 4). $-\frac{1}{2}$.
193. 1). $90°, 210°$ 2). $270°, 330°$ 3). $95°, 155°$ 4). $90°, 270°$
5). $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\pi$ 6). $0°, 45°, 60°$.
7). $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ 8). $\pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{2}, 0$ 9). $\pm\frac{\pi}{3}, 0$.
194. 1). $120°, 180°$ 2). $180°$ 3). $30°, 150°$.
195. 1). $45°, 135°$ 2). $60°, 120°$ 3). $30°, 150°$.
(n – везде целое число.)

Глава 6

Функции.

6.1 Функция и её график.

Пусть заданы два числовых множества $X \subset R$ и $Y \subset R$, между элементами которых установлено соответствие f. Примеры соответствий изображены на рис. 42.

a). b). c).

рис. 42.

В соответствии a) одному элементу множества X могут соответствовать два элемента множества Y; в соответствии b) каждому элементу множества X соответствует только один элемент множества Y, но разным элементам множества X могут соответствовать одинаковые элементы множества Y; в соответствии c) каждому элементу множества X соответствует только один элемент множества Y и разным элементам множества X соответствуют разные элементы множества Y – про такое соответствие говорят, что оно *взаимнооднозначно*.

Соответствие $f : X \to Y$*, при котором каждому элементу мно-*

жества X соответствует только один элемент множества Y называется функцией и обозначается как $y = f(x)$ (на рис. 42 это b) и c)). Множество X называется *областью определения функции*, величина $x \in X$ называется *аргументом* функции f. Предполагается, что для всякого элемента y множества Y соответствия f найдётся хотя бы один элемент множества X, что $y = f(x)$. Тогда множество Y – называется *множеством значений функции* f. Область определения функции $f(x)$ обозначается как $D(f)$, а её множество значений как $E(f)$.

Совокупность пар (x, y) в системе координат XOY называется *графиком функции*. Каждая пара (x, y) определяет точку $M = (x, y)$. В дальнейшем ограничимся прямоугольной декартовой системой координат, хотя существуют и другие.

Функция $y = ax+b$ называется *линейной*. График этой функции – прямая линия, поэтому достаточно знать две точки, чтобы на плоскости построить её график. При $x = 0$ получим $y = b$. Таким образом исходное уравнение можно записать в виде $y = a(x-0) + y(0)$ или, при $x \neq 0$, $(y - y(0))/(x - 0) = a$ (рис. 43). Следовательно $a = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол между осью OX и прямой

рис. 43.

$y = ax + b$, отсчитываемый против часовой стрелки. Угол α называется *острым*, если $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ и *тупым*, если $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Пример 125. Найти знаки параметров p и q для прямой $y = -px - q$, изображённой на рис. 44.

Решение. Из рис. 44 видно, что при $x = 0$ прямая пересекает ось OY выше оси OX, поэтому $y(0) = -q > 0$, откуда $q < 0$. Так как угол наклона тупой, то $\operatorname{tg} \alpha < 0$, следовательно $-p < 0$ или $p > 0$. Ответ: $p > 0, q < 0$.

рис. 44.

Пример 126. Найти площадь фигуры, ограниченную прямыми: $y = 4x, y = 7x$ и $x = 4$.

Решение. Изобразим прямые $y_1 = 7x$ и $y_2 = 4x$ в декартовой системе координат по двум точкам: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline y_1 & 0 & 28 \end{array}$ и $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline y_2 & 0 & 16 \end{array}$.

Из рис. 45 видно, что фигура, ограниченная прямыми y_1, y_2 и $x = 4$ – треугольник (закрашенная область). Площадь треуголь-

рис. 45.

ника равна $S = \frac{1}{2}ah$, где a и h – длины основания и высоты треугольника соответственно. В качестве основания удобно взять сторону AB, тогда OC – высота. Следовательно, площадь треугольника равна: $S = \frac{1}{2}\cdot(28-16)\cdot 4 = 24$. Ответ: 24.

При построении графиков функций используется *метод отражений* и *метод сдвигов*. Так, если известен график функции $y = f(x)$, то график функции $y = f(x+a)+b$ получается сдвигом графика $y = f(x)$ как целого на a единиц по оси OX влево, если $a > 0$ и вправо, если $a < 0$, и на b единиц по оси OY вверх при $b > 0$ и вниз при $b < 0$ (*метод сдвигов*). Действительно, если ввести координаты $x' = x + a$ и $y' = y - b$, то вначале можно построить график функции $y' = f(x')$ в системе координат $X'O'Y'$, а затем построить систему координат XOY так, что ось OY будет проходить через точку a оси $O'X'$, а ось OX – через точку $-b$ оси $O'Y'$ (на рис. 46 точки $(0;b)$ и $(-a;0)$ указаны в системе координат XOY). Метод отражений применяется при наличии симметрии и будет ясен из примеров.

рис. 46.

Пример 127. Построить график функции $y = |x|$.

Решение. Будем строить график методом отражений. Вначале построим график функции $y = x$ (рис. 47). Так как при $x < 0$ по правилу раскрытия модуля $y = -x$, то для $x < 0$ получим $y(-x) = y(x)$. Следовательно, часть графика, лежащая левее нуля оси OX, «отражается» относительно оси OY.

рис. 47. рис. 48.

В результате получим график, изображённый на рис. 48.

Пример 128. Построить график функции $y = ||2x + 1| - 2|$.

Решение. Строим график методом отражений и сдвигов. Сначала по двум точкам построим график $y_1 = 2x + 1$ (рис. 49):

x	0	-1/2
y_1	1	0

.
Методом отражений строим график функции $y_2 = |y_1|$ (рис. 50).

Найдём точки пересечения с осью OX графика функции $y_3 = y_2 - 2$, то есть $|2x + 1| - 2 = 0$, откуда $x_1 = 1/2, x_2 = -3/2$, после чего методом сдвигов построим его (рис. 51).

Наконец методом отражений строим график $y = |y_3|$. В результате на рис. 52 получим график $y = ||2x+1|-2|$.

рис. 49. рис. 50. рис. 51. рис. 52.

Пример 129. Построить график функции $y = |x+2| + |x-4|$.

Решение. Строим график *методом интервалов*: разобьём числовую ось на промежутки, в которых подмодульные выражения имеют один знак. Для этого решим уравнения: $x+2=0, x=-2$ и $x-4=0, x=4$. На числовой оси OX отметим точки $x=-2$ и $x=4$, разбивающие её на три области: I, II и III.

рис. 53.

Определим знаки, с которыми раскрываются подмодульные выражения в каждой из областей, подставляя значения x из соответствующей области, которые отметим на числовой прямой (рис. 53, где знаки + и – соответствуют первому и второму знакам раскрытия первого и второго подмодульных выражений). Строим графики, в каждой из областей отдельно (числа x выбираем так: одно на границе области, второе – внутри области):

рис. 54.

I. $y = -(x+2)-(x-4) = -2x+2$

x	-2	-3
y	6	8

II. $y = (x+2)-(x-4) = 6$

III. $y = (x+2)+(x-4) = 2x-2$

x	4	5
y	6	8

В результате получим график на рис. 54.

Пример 130. Построить график функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{|x-1|} + 2x$.

Решение. На числовой оси отмечаем точку $x = 1$, где подмодульное выражение обращается в ноль. Тем самым числовая прямая разбивается на две области: $x > 1$ и $x < 1$. В каждой из областей постоим график функции.

рис. 55.

I. $x < 1, y = \dfrac{x^2-1}{-(x-1)} + 2x = x - 1$. Строим прямую $y = x - 1$ по двум точкам: одну точку выбираем в I области, а вторую – на границе области, отмечая её как выколотую:

x	1	0
y	0	-2

.

II. $x > 1$, $y = \dfrac{x^2-1}{(x-1)} + 2x = 3x + 1$. Строим прямую $y = 3x + 1$ по двум точкам: одну точку выбираем во II области, а вторую – на границе области, также отмечая её как выколотую:

x	1	2
y	4	7

. Окончательный график указан на рис. 55.

Функция $y = \dfrac{k}{x}$ называется *обратной* функцией. Её графиком является гипербола, которая изображена на рис. 56.

Пример 131. Построить график функции $y = ||\dfrac{2}{x-3} + 1| - 4|$.

рис. 56.

Решение. Строим график функции $y_1 = 2/x'$ – это гипербола на рис. 57. Методом сдвига строим гиперболу $y_2 = 2/(x-3) + 1$ (рис. 58).

рис. 57. рис. 58. рис. 59.

Находим точки пересечения с осями координат функции y_2: если $x = 0$, то $y_2 = 1/3$, если $y_2 = 0$, то $2/(x-3) + 1 = 0$, откуда $x = 1$. Методом отражений строим $y_3 = |y_2|$ (рис. 59). С помощью сдвига строим $y_4 = y_3 - 4$

рис. 60. рис. 61.

(рис. 60). Находим точки пересечения y_4 с осями координат, решая уравнение: $||\frac{2}{x-3}+1|-4=0, \frac{2}{x-3}+1=\pm 4, x_1=13/5, x_2=11/3$. Наконец методом отражений строим $y=|y_4|$ (рис. 61). (Заметим, что необходимость в нахождении точек пересечения с осями координат связана с тем, что для различных числовых значений координат точек пересечения будут различные графики.)

рис. 62.

Графиком квадратичной функции $y=ax^2+bx+c, a\neq 0$ является *парабола*, изображённая на рис. 62. Если $a>0$, то ветви параболы направлены вверх, а если $a<0$, то – вниз. Ранее было показано, что при $a\neq 0$ квадратный трёхчлен может быть представлен в виде суммы квадрата, зависящего от x, и числа: $y=a((x+b/2a)^2+(c/a-b^2/4a^2))$. Так как в вершине параболы x_0 достигается минимальное значение y при $a>0$ или максимальное при $a<0$, то $(x_0+b/2a)^2=0$ или $x_0=-b/2a$. Заметим, что если известны корни квадратного уравнения x_1 и x_2, то абсцисса вершины x_0 находится по формуле $x_0=(x_1+x_2)/2$. Действительно, $(x_1+x_2)/2=((-b+\sqrt{D})/(2a)+(-b-\sqrt{D})/(2a))/2=-b/(2a)=x_0$, где $D=b^2-4ac$.

График параболы строится в первую очередь по вершине, с координатами $x_0=-b/(2a)$, $y_0=a(-b/(2a))^2-b^2/(2a)+c=-b^2/(4a)+c$ и точке пересечения с осью OY $(0;c)$. Если же $D>0$, то отмечают также точки пересечения с осью OX $(0;x_1)$ и $(0;x_2)$, где $x_{1,2}=(-b\pm\sqrt{D})/(2a)$.

Пример 132. Найти знаки коэффициентов p,q и l параболы $y=-px^2+qx-l$, если её график изображён на рис. 63.

рис. 63. рис. 64.

Решение. Так как ветви параболы направлены вверх, то $-p > 0$, откуда $p < 0$. Из рис. 64 видно, что $y(0) = -l < 0$, поэтому $l > 0$. Абсцисса вершины, как следует из рис. 64, расположена правее оси OY, поэтому $x_0 = -\dfrac{q}{-2p} > 0$. Следовательно $q < 0$. Ответ: $p < 0, q < 0, l > 0$.

Пример 133. Построить график функции $y = |x^2 - 2x|$.

Решение. Пусть $y_{(1)} = x^2 - 2x = x(x-2)$ – это парабола. Парабола пересекается с осью OX в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Откуда находим координаты вершины: $x_0 = (0+2)/2 = 1$ и $y_{0(1)} = 1 \cdot (1-2) = -1$. Строим график $y_{(1)} = x^2 - 2x$. Затем методом отражений строим график функции $y = |y_{(1)}|$ (рис. 65).

рис. 65.

Периодичность функции. Если существует такое число T, что для всех x выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$, то про функцию $f(x)$ говорят, что она периодичная с периодом T. Из определения понятно, что периодов у функции много. Обычно выбирают наименьший положительный T_0 и именно его называют периодом функции, а отрезок $[x_0; x_0 + T_0]$ (x_0 – любое число) *наименьшим отрезком периодичности*. Так, функция $\sin x$ имеет период $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, при этом наименьший положительный период равен 2π, а для функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ он равен π.

Пример 134. Найти наименьший положительный период $f(x) = \cos 3x$.

Решение. Наименьший отрезок периодичности $\cos\alpha$ равен $[0; 2\pi]$, то есть множество, при котором $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. Заменяя $\alpha \to 3x$, получим: $0 \leqslant 3x \leqslant 2\pi$. Откуда находим наименьший отрезок периодичности $\cos 3x$: $0 \leqslant x \leqslant 2\pi/3$. Следовательно $T_0 = 2\pi/3 - 0 = 2\pi/3$. Ответ: $2\pi/3$.

Пример 135. Найти наименьший положительный период функции $f(x) = 3\cos x - 4\sin x - 2$.

Решение. Из формулы вспомогательного угла существует такое φ, что $f(x) = 3\cos x - 4\sin x - 2 = 5\sin(x+\varphi) - 2$. Наименьший отрезок периодичности функции $\sin\alpha$ равен $[0; 2\pi]$, то есть при $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. Заменяя $\alpha \to x+\varphi$, получим: $0 \leqslant x+\varphi \leqslant 2\pi$. Откуда находим наименьший отрезок периодичности функции $\sin(x+\varphi)$: $-\varphi \leqslant x \leqslant 2\pi - \varphi$. Следовательно наименьший положительный период равен $T = (2\pi - \varphi) - (-\varphi) = 2\pi$. Ответ: 2π.

Чётность функции. Если для всех x из О. Д. З. ($x \in D(f)$) функция $f(x)$ удовлетворяет равенству $f(-x) = f(x)$, то она называется ***чётной***, если $f(-x) = -f(x)$, то она называется ***нечётной***. Если же не выполняется ни одно из указанных равенств, то такая функция называется ***функцией общего вида***. Чтобы выяснить чётность функции $f(x)$ необходимо рассмотреть $f(-x)$ и сравнить её с $f(x)$.

Пример 136. Определить чётность функции: $f(x) = \dfrac{2^{2x}}{2^{4x} - 1}$.

Решение. Запишем $f(-x)$ и сделаем тождественное преобразование, умножив и числитель и знаменатель на 2^{4x}:

$$f(-x) = \frac{2^{-2x}}{2^{-4x} - 1} \cdot \frac{2^{4x}}{2^{4x}} = \frac{2^{2x}}{1 - 2^{-4x}} = -\frac{2^{2x}}{2^{-4x} - 1} = -f(x).$$

Ответ: функция нечётная.

6.2 Обратные функции. Сложные функции.

В том случае, когда функция f взаимнооднозначна (рис. 42 с).), по известному значению y функции $y = f(x)$ можно восстановить значение аргумента x, при котором было получено данное значение функции y (рис. 66).

В этом случае говорят о том, что имеется обратная функция, которую обозначают как f^{-1}. Обратная функция для линейной также является линейной. Пусть, например, $f(x) = 2x + 4$. Обозначим $y = f(x)$ и выразим x через y: $x = f^{-1}(y) = y/2 - 2$. Так как аргумент функции обозначается как x, а её значение как y, то сделаем замену $x \to y, y \to x$. Следовательно функция, обратная $y = 2x+4$ имеет вид: $y = x/2 - 2$.

рис. 66.

Пример 137. Найти точки пересечения функции $f(x) = 2x - 1$ и функции, ей обратной.

Решение. Найдём обратную функцию f^{-1}. Обозначим $y = f(x)$, тогда $y = 2x-1$. Выразим переменную x через переменную y: $x = (y+1)/2$ и сделаем замены: $x \to y, y \to x$. Таким образом, обратная функция имеет вид: $f^{-1}(x) = (x+1)/2$.

В точке пересечения значения функции $f(x)$ и функции, ей обратной $f^{-1}(x)$, равны, поэтому: $2x - 1 = (x+1)/2$. Откуда находим, что $x = 1$, тогда $y = 1$. Ответ: $(1; 1)$.

Пусть даны функции $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$. Тогда функция $h = g \circ f : X \to Z$ называется *сложной функцией* (рис. 67), где функции f и g её составляющие. Выражение $g \circ f$ называется *композицией* функций f и g. Например, если $f(x) = \sin x$ и $g(x) = x^2$, то $g \circ f(x) = g(f(x)) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$ – сложная функция. Множество значений сложной функции определяется по множеству значений её составляющих.

рис. 67.

Пример 138. Пусть $f(x) = \cos x - x$ и $g(x) = x \sin x$. Найти $g(f(x))$.

Решение. $g(f(x)) = (\cos x - x)\sin(\cos x - x)$.

Пример 139. Найти множество значений функции $f(x) = \sin^2 x$.

Решение. Воспользуемся формулой двойного угла $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. Пусть $t = 2x$, $E(t) = R$, поэтому $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$. Следовательно

$$\begin{array}{ccccccc} -1 & \leqslant & \cos 2x & \leqslant & 1 & & \cdot(-1/2) \\ 1/2 & \geqslant & -\frac{1}{2}\cos 2x & \geqslant & -1/2 & & +1/2 \\ 1 & \geqslant & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x & \geqslant & 0. & & \end{array}$$

Ответ: $[0; 1]$.

Пример 140. Найти множество значений функции $f(x)$, если $f(x) = 3\sin x - 4\cos x + 2$.

Решение. По формуле вспомогательного угла находим $3\sin x - 4\cos x = 5\sin(x + \varphi)$. Пусть $t = x + \varphi$, тогда множество значений $E(t) = R$, поэтому $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$. Следовательно

$$\begin{array}{ccccc} -1 \leqslant & \sin(x+\varphi) & \leqslant 1 & & \cdot 5 \\ -5 \leqslant & 5\sin(x+\varphi) & \leqslant 5 & & +2 \\ -3 \leqslant & 5\sin(x+\varphi) + 2 & \leqslant 7. & & \end{array}$$

Ответ: $[-3; 7]$.

Пример 141. Найти множество значений функции $f(x)$, если $f(x) = 2\sin^2 x - \sin x + 1$.

Решение. Сделаем замену $t = \sin x$ и найдём множество значений функции $y = 2t^2 - t + 1$ при $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

рис. 68. рис. 69. рис. 70.

График функции $y(t)$ – парабола, ветвями вверх, вершина которой находится в точке $(t_0 = 1/4, y_0 = 7/8)$. Строим её график (рис. 68). Находим значения $y(t)$ на границе области задания: $y(-1) = 2(-1)^2 - (-1) + 1 = 4$ и $y(1) = 2 \cdot 1^2 - 1 + 1 = 2$. Выделяем часть графика $y(t)$ при $t \in [-1; 1]$. Из рис. 68 получим, что при $-1 \leqslant t \leqslant 1$ оказывается $7/8 \leqslant y \leqslant 4$. Ответ: $[7/8; 4]$.

Пример 142. Найти множество значений функции $f(x)$, если

$f(x) = (x^2 - x - 1)^2 + 4x^2 - 4x - 3$.

Решение. В функции $f(x)$ выделим одинаковое выражение: $(x^2 - x - 1)^2 + 4x^2 - 4x - 3 = (x^2 - x - 1)^2 + 4(x^2 - x - 1) + 1$, сделаем замену $t = x^2 - x - 1$ и построим график $t = t(x)$ (рис. 69). Вершина параболы $t = t(x)$ находится в точке $x_0 = 1/2, t_0 = -5/4$. Так как ветви параболы направлены вверх, то $E(t) = [-5/4; +\infty)$. Очевидно, что множество значений функций $f(x)$ и $y(t)$, при $t \in [-5/4; +\infty)$ совпадают, поэтому строим график $y = t^2 + 4t + 1$ и выделяем только ту его часть, когда $t \in [-5/4; +\infty)$ (рис. 70). Находим координаты вершины параболы $y = y(t)$: $t_0 = -2, y_0 = 4 - 8 + 1 = -3$ и значения функции на границе $y(-5/4) = -39/16$. Из рис. 70 видим, что при $t \geqslant 5/4$ будет $y(t) \geqslant -39/16$. Ответ: $[-39/16; +\infty)$.

Использование производной позволяет найти более быстрое решение задачи, но необходимо уметь находить производную сложной функции (более подробно см. в параграфе 6.4):

$f'(x) = 2(x^2 - x - 1)(2x - 1) + 4 \cdot 2x - 4 = 4(x - \frac{1}{2})(x^2 - x + 1)$.

рис. 71.

Так как, как видно из анализа производной, при $x > \frac{1}{2}$ функция возрастает, то при увеличении переменной x до бесконечности значение функции также увеличивается от минимального значения в точке $x = \frac{1}{2}$ до бесконечности. Находим, что $f(\frac{1}{2}) = -2\frac{7}{16}$, откуда $E(f) = [-\frac{39}{16}; +\infty)$.

Пример 143. Найти множество значений функции $f(x) = 8^{\frac{1}{x^2-x+1}}$.

рис. 72. рис. 73. рис. 74.

Решение. Пусть $t = x^2 - x + 1$. График этой функции парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке $x_0 = 1/2, t_0 = 3/4$, поэтому $E(t) = [3/4; +\infty)$ (рис. 72). Вводим функцию $y = 1/t$ и строим её график при $t > 0$. Её график – гипербола (рис. 73). Так как $3/4 \leqslant t$, то $0 < y \leqslant 4/3$ (рис. 73). Вводим функцию $z = 8^y$ и строим её график (рис. 74). Так как $0 < y \leqslant 4/3$, то $1 = 2^\circ < z \leqslant 8^{4/3} = 16$ (рис. 74). Ответ: $(1; 16]$.

Пример 144. Найти наибольшее значение функции $f(x)$, если $f(x) = \log_2(4x - x^2 + 4)$.

Решение. Введём обозначение $t = 4x - x^2 + 4$. Так как функция $y = \log_2 t$ – возрастающая, то чем больше значение t, тем больше y, поэтому достаточно найти наибольшее значение t_0. График функции $t = 4x - x^2 + 4$ – парабола, ветвями вниз. Её наибольшее значение находится в вершине x_0. Так как $x_0 = 2$, то $t_0 = 8$, откуда $\max y = \log_2 8 = 3$. Ответ: 3.

Пример 145. Найти наибольшее значение функции $f(x) = 4x^{\log_{1/2} 16x}$.

Решение. Преобразуем функцию $f(x)$:

$$f(x) = 4x^{\log_{1/2} 16x} = 4\left((\frac{1}{2})^{\log_{1/2} x}\right)^{\log_{1/2} 16x} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{1/2} x \cdot (\log_{1/2} x - 4)}.$$

Введём обозначение $t = \log_{1/2} x$, тогда $y = 4(\frac{1}{2})^{t(t-4)}$. Так как функция $f(x) = (1/2)^x$ – убывающая, то чем меньше значение x, тем больше $f(x)$, поэтому, чтобы найти наибольшее значение $f(x)$, достаточно взять наименьшее x. График функции $z = t(t-4)$ – парабола, ветвями вверх, её наименьшее значение находится в вершине, где $t_0 = 2$, поэтому $z_{min} = 2(-2) = -4$. Откуда $\max y = 4(\frac{1}{2})^{-4} = 4 \cdot 16 = 64$. Ответ: 64.

6.3 Задачи на количество корней уравнения.

Задачи на количество корней уравнения, содержащего разные элементарные функции, обычно решаются с помощью графиков. Ряд задач можно решить из соображений единственности решения на О. Д. З.

Пример 146. Найти количество корней уравнения $\lg x + x - 2 = 0$.

Решение. В имеющемся уравнении выделим две элементарные функции, записав их по разные стороны от знака равенства: $\lg x = 2 - x$. Количество корней уравнения $f(x) = g(x)$ равно количеству точек пересечения графиков $y_1(x) = f(x)$ и $y_2(x) = g(x)$, поэтому строим графики десятичного логарифма и линейной

рис. 75.

функции (рис. 75) и видим, что имеется только одна точка пересечения.

Ответ: один корень.

Пример 147. Найти количество корней уравнения $\dfrac{2x}{\pi} + \sin x \operatorname{ctg} x = 1$.

Решение. Так как $\sin x \operatorname{ctg} x = \cos x$, то преобразуем условие к виду:
$$\begin{cases} \cos x = 1 - 2x/\pi \\ \sin x \neq 0, x \neq \pi k, k \in Z \end{cases}$$

рис. 76.

и найдём количество точек пересечения графиков функций $f(x) = \cos x$ и $g(x) = 1 - 2x/\pi$ на О. Д. З. (точки, не входящие в О. Д. З., будем отмечать как выколотые – незакрашенные кружочки).

Из рис. 76 видно, что имеется всего три точки пересечения: при $x = 0, x = \pi/2$ и $x = \pi$, но две из них не входят в О. Д. З. Ответ: один корень.

6.4 Построение графиков функций с помощью производной.

В школьной программе говорится, что обычно по функции $f(x)$ можно построить новую функцию $f'(x)$, которая называется ***производной*** *функции* $f(x)$. О таких $f(x)$ говорят как о *дифференцируемых функциях.*

Имеется таблица производных элементарных функций:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{arctg} x$	$1/(1+x^2)$
x^n	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{arcctg} x$	$-1/(1+x^2)$
a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$	$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\log_a x$	$1/(x \ln a)$	$\operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x$	$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$

и свойства, с помощью которых находятся производные:

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;
2. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0$;
4. $(f(Ax+b))' = Af'(Ax+b)$.

Теорема. *Пусть $f(x)$ – дифференцируемая на $(a;b)$ функция. Если её производная на некотором $(c;d) \subset (a;b)$ положительна, то функция возрастает на $(c;d)$; если же – отрицательная, то – убывает. Если же в точке $x_0 \in (c;d)$ функция достигает наибольшего или наименьшего значения, то $f'(x_0) = 0$.*

Если функция возрастает или убывает на $(c;d)$, то про неё говорят, что она *монотонна на* $(c;d)$.

Если в точке $x_0 \in (c;d)$ функция достигает наибольшего (или наименьшего) значения по сравнению со всеми другими точками интервала $(c;d)$, то про точку x_0 говорят как о точке *экстремума*, если $f'(x_0) = 0$, то говорят, что x_0 – критическая точка.

Пример 148. Найти производную функции $f(x)$, если:

1). $f(x) = x^2 \cos x - 4 \operatorname{tg} x$.

$f'(x) = (x^2)' \cos x + x^2 (\cos x)' - 4' \operatorname{tg} x - 4(\operatorname{tg} x)' = 2x \cos x - x^2 \sin x + \dfrac{4}{\cos^2 x}$.

2). $f(x) = 5 \operatorname{arctg}(2x-3) + \dfrac{x^5}{x^2-1}$.

$f'(x) = 5(\operatorname{arctg}(2x-3))' + \dfrac{(x^5)'(x^2-1) - x^5(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \dfrac{5 \cdot 2}{1+(2x-3)^2} + \dfrac{5x^4(x^2-1) - x^5 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{10}{1+(2x-3)^2} + \dfrac{3x^6 - 5x^4}{(x^2-1)^2}$.

Пример 149. Найти промежутки монотонности функции $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$.

Решение. Найдём производную функции: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 2x(2x^2 - 3x + 1) = 2x(x-1)(2x-1)$. После чего находим знак производной в различных точках числовой оси (рис. 77):

рис. 77.

Ответ: при $x \in (-\infty; 0) \cup (1/2; 1)$ – функция убывает, при $x \in (0; 1/2) \cup (1; +\infty)$ – функция возрастает.

Пример 150. Построить график функции $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$.

Решение. 1. Найдём О.Д.З. функции: $x \in R$.

2. Найдём производную функции: $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$.

рис. 78.

3. Найдём точки, подозрительные на экстремум: $f'(x) = 0, x = \{0, \pm 1\}$.

4. Находим значение функции в критических точках: $f(0) = -3, f(-1) = -4, f(1) = -4$.

5. Найдём промежутки монотонности функции. (рис. 78)

рис. 79.

6. Строим график функции (рис. 79).

Через любые две точки x_0 и x_1 графика $y = f(x)$ можно провести прямую – она называется *секущей*. Если точку x_1 максимально приближать к точке x_0, то предельное положение секущей называется *касательной* в точке x_0 к графику $y = f(x)$. Оказывается, что тангенс угла наклона секущей в точности равен производной функции в точке x_0 и равен угловому коэффициенту в уравнении прямой $y = kx + b$. Отсюда следует уравнение касательной:

$$y_{\text{кас.}} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{6.1}$$

Пример 151. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2+1}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Найдём производную:

$f'(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x^2+1}\right)' = \dfrac{\cos x(x^2+1) - 2x\sin x}{(x^2+1)^2}$. Тогда $f(0) = 0, f'(0) = 1$. Ответ: $y = x$.

Пример 152. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 4x$ на отрезке $[0; 2]$.

Теорема *Наибольшее и наименьшее значения в области дифференцируемой функции находятся либо в критических точках, принадлежащих области, либо на границе области, либо в точках области, где функция не дифференцируема.*

Решение. В силу вышеуказанной теоремы найдём точки, в которых производная равна нулю (заданная функция дифференцируема при любых x. Обычно функция дифференцируема во всех точках своей области определения и приходится исследовать на дифференцируемость только функции, содержащие модуль. В этом случае изучают точки, в которых подмодульное выражение равно нулю.):

$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$ и $f'(1) = 0$.

Так как $f(0) = 0, f(1) = -3, f(2) = 8$, то из трёх чисел выбираем наибольшее и наименьшее. Ответ: $\min\limits_{x\in[0;2]} f(x) = -3$, $\max\limits_{x\in[0;2]} f(x) = 8$.

6.5 Задания.

196. Найти наименьшее значение функции $f(x)$:

1). $f(x) = (x^2 - 2x + 2)^2 + 4(x^2 - 2x + 3)$
2). $f(x) = (x^2 + x)^2 - 6(x^2 + x)$
3). $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x - x^2 + 3)$
4). $f(x) = \log_2(x^2 + 4x + 8)$
5). $f(x) = \log_{1/2}(x - x^2 + \frac{3}{4})$

197. Найти наибольшее значение функции $f(x)$:

1). $f(x) = x^2 - x - 1 - (x^2 - x + 1)^2$
2). $f(x) = \log_3(5 - x^2 + 4x)$

198. Найти множество значений функции $f(x)$:

1).	$f(x) = 3 - 7\cos x$	8).	$f(x) = \cos 2x + 3\sin^2 x - 3$
2).	$f(x) = 6 + 3\sin x$	9).	$f(x) = \sin^2 x - \cos x + 2$
3).	$f(x) = \|x - 3\| - \|2 - x\|$	10).	$f(x) = (\sin x - \cos x)^2 + 3$
4).	$f(x) = \|2 - x\| - \|5 + x\|$	11).	$f(x) = \log_2(x^2 - x + 1/2)$
5).	$f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 1$	12).	$f(x) = \lg(x^2 - 10x + 125)$
6).	$f(x) = 3\sin x - 4\cos x + 2$	13).	$f(x) = 4^{\frac{1}{x^2+2}}$
7).	$f(x) = 12\sin 2x + 5\cos 2x$	14).	$f(x) = 4x^{\log_4(2x)}$

15). $f(x) = 3x + 2$, при $x \in [2; 3]$
16). $f(x) = |2x - 4|$, при $x \in [-1; 3]$

17). $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\cos x}$, при $x \in [-\pi/6; \pi/6]$

18). $f(x) = \dfrac{3}{2+\sin x}$, при $x \in [\pi/6; 7\pi/6]$

19). $f(x) = \dfrac{2}{2-\cos x}$, при $x \in [0; \pi/3]$

20). $f(x) = \dfrac{2}{2\sin x - 3}$, при $x \in [-\pi/2; \pi/6]$

21). $f(x) = \log_2(x+4) - \log_2(x+12)$, при $x \in [4; 12]$

22). $f(x) = \log_3(x-1) - \log_3(x+1)$, при $x \in [2; 8]$

23). $f(x) = \frac{6}{\pi}\arcsin(2x^2-2x)$ 24). $f(x) = \frac{15}{\pi}\arccos(x^2-2x+\frac{3}{2})$

199. Найти количество корней уравнения:

1). $x^2 - 4x + \log_{\frac{1}{3}} x = 0$ 6). $2\cos(x^2+x) - 2^x = 2^{-x}$

2). $x^2 - x - \log_2 x = 0$ 7). $2 + \cos(\pi x/3) - \sqrt{6x - x^2 - 8} = 0$

3). $-x^2 + x^4 - 2^x + \frac{9}{8} = 0$ 8). $\operatorname{arctg} x + x - x^2 = 0$

4). $\pi \operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} - x = 0$ 9). $\operatorname{arcctg} x - 1 - 3x^2 + 4x = 0$

5). $2\cos x + 1 = 2x^2$ 10.) $\operatorname{ctg} x \sin x + 2x/\pi = 1$

200. Определить чётность функции:

1). $f(x) = \cos x - x\sin x$ 5). $f(x) = \sin x - x\cos x$

2). $f(x) = \log_3\dfrac{1+2x}{1-2x}$ 6). $f(x) = \dfrac{5^{2x}}{25^{2x}+1}$

3). $f(x) = x^2 + 3|x|\cos x$ 7). $f(x) = \dfrac{3^{2x}-3^{-2x}}{3^{2x}+3^{-2x}}$

4). $f(x) = x\lg\dfrac{1-4x}{1+4x}$ 8). $f(x) = \dfrac{3^{4x}}{9^{4x}-1}$

201. Найти наименьший положительный период функции:

1). $f(x) = \cos^2 2x + 1$ 4). $f(x) = 11\sin 6x - 60\cos 6x - 2$

2). $f(x) = \operatorname{tg}\operatorname{tg} x - 2$ 5). $f(x) = \sin x\cos x - 2$

3). $f(x) = \arcsin\sin x$ 6). $f(x) = 5\sin\frac{x}{3} - 12\cos\frac{x}{3} + 1$

202. Построить график функции

1). $f(x) = |x+3| - |3-x|$ 5). $f(x) = |x+5| + |3+x|$

2). $f(x) = \dfrac{x^4+2x^3-2x^2+2x-3}{|1-x|(x^2+1)} - 2x$ 6). $f(x) = |x-1| + |2-3x|$

3). $f(x) = \dfrac{3x^2-5x-2}{|2-x|} + x$ 7). $f(x) = |1 - |\dfrac{1}{x-2}||$

4). $f(x) = ||1-2x| - 2|$ 8). $f(x) = |3 - |x-1||$

203. Разбейте число 64 на два слагаемых, чтобы их произведение было наибольшим и найдите это произведение.

204. Разбейте число 16 на два слагаемых, чтобы их произведение было наибольшим и найдите это произведение.
205. Найти наибольшее значение произведения $(y-2x+5)(x+y-2)$, если $x-2y=3$.
206. Найти наименьшее значение произведения $(y-x+2)(6x+y)$, если $2x-y=4$.
207. Найти область определения функции:

1). $f(x)=\log_2(x^2-6x+8)$ 7). $f(x)=\arcsin(x^2+2x+2)$
2). $f(x)=\log_2(3x-x^2+10)$ 8). $f(x)=\sqrt{x^2-6x-16}$
3). $f(x)=\sqrt{2-\log_2(x-1)}$ 9). $f(x)=\sin(\pi/3+\arcsin x)$
4). $f(x)=\sqrt{1+\log_{\frac{1}{2}}(2-x)}$ 10). $f(x)=\cos(\arcsin(x+\pi))$
5). $f(x)=\arccos(2x^2-x)$ 11.) $f(x)=\sqrt{2-x-x^2}-\lg\dfrac{2x-1}{x-2}$
6). $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x-12}}$ 12.) $f(x)=\lg\dfrac{3-x}{x^2+4x}+\dfrac{1}{1-x}$
13. $f(x)=\sqrt{4\cos^2-1}-\lg(-x^2-5x-6)$ 14. $f(x)=\dfrac{\sqrt{4\sin^2-3}}{\log_2(4-x^2)}$

208. Найти координаты точек пересечения функции $y=f(x)$ и функции ей обратной, если:

1). $f(x)=2x-1$ 2). $f(x)=2-x$ 3). $f(x)=3+x$.

209. Найти промежутки монотонности функции:

1). $f(x)=x^3-3x$ 3). $f(x)=\sin^2 x-\sin x$, при $x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$
2). $f(x)=6\,\mathrm{arctg}\,x-x^3$ 4). $f(x)=\mathrm{tg}\,x-2x$, при $x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$.

210. Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0:

1). $f(x)=x\cos x$, $x_0=\pi$ 3). $f(x)=\mathrm{ctg}\,x+x$, $x_0=\pi/4$
2). $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$, $x_0=\pi$ 4). $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$, $x_0=2$.

211. Найти наибольшее и наименьшее значения функции, если:

1). $f(x)=x-2\cos^2 x$ при $x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$
2). $f(x)=x-2\,\mathrm{arctg}\,x$ при $x\in[0;\sqrt{3}]$.

Ответы.

196. 1). 9 2). −9 3). −2 4). 2 5). 0. 197. 1).$-\frac{29}{16}$ 2). 2.
198. 1). $[-4;10]$ 2). $[3;9]$ 3). $[-1;1]$ 4). $[-7;7]$ 5). $[-1;3]$
6). $[-3;7]$ 7). $[-13;13]$ 8). $[-2;-1]$ 9). $[1;3\frac{1}{4}]$ 10). $[3;5]$
11). $[-2;+\infty)$ 12). $[2;+\infty)$ 13). $(1;2]$ 14). $[4\frac{15}{16};+\infty)$
15). $[8;11]$ 16). $[0;6]$ 17). $[\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}};\frac{2}{3}]$ 18). $[1;2]$ 19). $[\frac{4}{3};2]$

20). $[-1;-\frac{2}{5}]$ 21). $[-1;1-\log_2 3]$ 22). $[-1;\log_3 7-2]$ 23). $[-1;3]$
24). [0;5]

199. 4), 6), 7), 10) – один 1), 2), 5), 8), 9) – два 3) – три.

200. 1), 3), 4), 6) – чётная 2), 5), 7), 8) – нечётная.

201. 1). $\pi/2$ 2). π 3). 2π 4). $\pi/3$ 5)/ π 6). 6π.

202

1). 2). 3). 4).

5). 6). 7). 8).

203. 1024. 204. 64. 205. 0. 206. -4.5.

207. 1). $(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$ 2). $(-2;5)$ 3). $(1;5]$ 4). $[0;2)$
5). $[-\frac{1}{2};1]$ 6). $(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)$ 7). -1 8). $(-\infty;-2]\cup[8;+\infty)$
9). $[-1;1]$ 10). $[-1-\pi;1-\pi]$ 11). $[-2;\frac{1}{2})$
12). $(-\infty;-4)\cup(0;1)\cup(1;3)$ 13.$(-3;-2\pi/3]$.
14. $(-2;-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3};-\pi/3]\cup[\pi/3;\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};2)$.

208. 1). $(1,1)$ 2). $(C,2-C),\forall C\in R$ – любое 3). $\varnothing$.

209. 1). $x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$ – возрастает, $x\in[-1;1]$ – убывает;
2). при $x\in[-1;1]$ – возрастает, $x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$ – убывает;
3). $x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}]$ – убывает, $x\in[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2})$ – возрастает;
4). $x\in(-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$ – возрастает, $x\in[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$ – убывает.

210. 1). $y=-x$ 2). $y=-x+\pi-1$ 3) $y=-x+1+\pi/2$
4). $y=(16-5x)/9$.

211. 1). $-\frac{\pi}{12}-1-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{2}$ 2). $1-\frac{\pi}{2},0$.

Глава 7

Задания с параметром.

7.1 Линейные уравнения с параметром.

Уравнения вида $ax + b = 0$, где x – неизвестная переменная относят к *линейным уравнениям с параметром.* Если $a \neq 0$, то это уравнение линейное. Если $a = 0$, то это числовое равенство вида $0x + b = 0$, которое справедливо при $b = 0$. Поэтому задачи, содержащие параметр, предполагают исследование. В большинстве случаев требуется найти решения при всевозможных значениях параметров задачи. В случае линейного уравнения относительно неизвестной x необходимо привести его к виду $Ax = B$, после чего исследовать случаи, когда $A = 0$ и $A \neq 0$.

Пример 153. (Задача на исследование.) Решить уравнение относительно неизвестной переменной x: $ax - 2 = a + x$.

Решение. Приведём условие к виду $Ax = B : (a-1)x = a + 2$.

I. Пусть $a - 1 = 0$, $a = 1$, тогда: $0 \cdot x = 2$. Это уравнение не имеет решений.

II. Пусть $a - 1 \neq 0$, $a \neq 1$. Тогда можно разделить правую и левую части уравнения на $a - 1$. В результате получим: $x = (a + 2)/(a - 1)$.

Ответ: при $a = 1$ – решений нет; при $a \neq 1$, $x = (a + 2)/(a - 1)$.

Пример 154. (Задача на нахождение значений параметров, удовлетворяющих условиям задачи.) Найти все значения параметров a и b, при которых уравнение $ax - b - 3 = 3x + 2a$ имеет бесконечно много решений.

Решение. Приведём условие к виду $Ax = B : (a - 3)x = 2a + b + 3$. Пусть $a - 3 \neq 0, a \neq 3$. Решение находится делением правой и левой частей на $a-3$. В результате будет найдено одно решение (так как это линейное уравнение), а требуется более одного. Следовательно бесконечное множество решений возможно только при условии $a-3=0$, $a=3$. Но уравнение $0 \cdot x = B$ имеет решения только при условии, что правая часть равна нулю. В результате приходим к системе: $\begin{cases} a-3=0 \\ 2a+b+3=0 \end{cases}$. Ответ: $a=3, b=-9$.

Пример 155. Найти все значения параметра a, при котором система уравнений $\begin{cases} 2x+ay=3 \\ x+3y=a-2 \end{cases}$ имеет одно решение.

Решение. Будем решать методом подстановки. Из второго уравнения выразим x и подставим в первое: $\begin{cases} x=a-2-3y \\ 2(a-2-3y)+ay=3 \end{cases}$. В результате приходим к уравнению с одной переменной: $(a-6)y=7-2a$, которое имеет одно решение, только при условии, что оно линейное. Это возможно только при $a-6 \neq 0$. Вычислив y, при заданном a, можно найти x. Таким образом при $a \neq 6$ система имеет только одно решение. Ответ: $a \neq 6$.

Пример 156. Решить уравнение относительно неизвестной переменной x: $(a-1)(a-2)x=(a-1)(a-3)$.

Решение. I. $(a-1)(a-2)=0$. Откуда $a=\{1;2\}$.

a). Пусть $a=1$, тогда $0 \cdot x = 0$, что верно при любом x.

b). Пусть $a=2$, тогда $0 \cdot x = -1$ – решений нет.

II. Пусть $(a-1)(a-2) \neq 0$. Тогда $a \neq \{1;2\}$. Разделим левую и правую части уравнения на коэффициент перед x, тогда: $x=(a-3)/(a-2)$. Ответ: при $a=1$ – x любое; при $a=2$ – решений нет; при $a \neq \{1;2\}$, $x=(a-3)/(a-2)$.

Пример 157. Найти все a, при которых площадь треугольника, образованного осями координат и прямой $y=x+a-1$ равна 2.

Решение. Построим прямую в декартовой системе координат по точкам. При $x=0$ получим $y=a-1$, при $y=0$ следует $x=1-a$. Так как угол наклона прямой $y=x+a-1$ острый, то возможны два расположения прямой при $a>1$ и $a<1$, изображённых на рис. 80, при этом: $|OA|=0-(1-a)=a-1$,

рис. 80.

$|OC|=0-(a-1)=1-a$, $|OD|=1-a$, $|OB|=a-1$. Известно: $S_{\triangle}=\frac{1}{2}b \cdot h$, где b – основание и h – высота треугольника.

Если $a > 1$, то $b = |OA| = a - 1$, $h = |OB| = a - 1$, если же $a < 1$, то $b = |OD| = 1-a$, $h = |OC| = 1-a$, но в обоих случаях $S_{\triangle} = \frac{1}{2}(a-1)^2 = 2$. Следовательно $a - 1 = \pm 2$ и $a = 3$ или $a = -1$. Ответ: $a = \{-1; 3\}$.

Пример 158. Найти все значения параметра a, при которых прямые $y = 2ax - 6$ и $y = x + a - 4$ пересекаются в IV четверти (при $x > 0$ и $y < 0$).

Решение. Координаты точек пересечения двух графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$ находятся как решения системы уравнений: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$. В данном случае получим систему: $\begin{cases} y = 2ax - 6 \\ y = x + a - 4 \end{cases}$, которую решаем методом подстановки: $2ax - 6 = x + a - 4$, откуда $(2a - 1)x = a + 2$. Если $2a - 1 = 0, a = 1/2$, то $0 \cdot x = 5/2$ – уравнение решений не имеет, следовательно прямые не пересекаются, поэтому пусть $a \neq 1/2$. Тогда $x = (a+2)/(2a-1)$ и $y = (a+2)/(2a-1)+a-4 = 2(a-1)(a-3)/(2a-1)$. Следовательно

$$\begin{cases} \dfrac{2(a-1)(a-3)}{2a-1} < 0 \\ \dfrac{a+2}{2a-1} > 0. \end{cases}$$

рис. 81.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (1; 3)$.

7.2 Квадратные уравнения с параметром.

Уравнение вида $ax^2+bx+c = 0$, где x – неизвестная переменная относят к *квадратным уравнениям с параметром.* При $a \neq 0$ – это квадратное уравнение, имеющее не более двух корней, если $D \geqslant 0$, и не имеющее корней, если $D < 0$. При $a = 0$ задача сводится к исследованию линейного уравнения с параметром.

Пример 159. Найти все значения параметра a, при котором функция $f(x) = \log_2(x^2 - 3ax + a + 7)$ определена при всех x.

Решение. Для того, чтобы заданная функция была определена при всех x достаточно потребовать чтобы аргумент логарифма был бы положителен, то есть: $x^2 - 3ax + a + 7 > 0$. Но график функции $y = f(x)$ – парабола, ветвями вверх. Требование $x^2 - 3ax + a + 7 > 0$ равносильно отсутствию корней квадратного уравнения $x^2 - 3ax + a + 7 = 0$, что выполняется при $D < 0$, т. о. $9a^2 - 4(a + 7) < 0$ или $9(a - 2)(a + 14/9) < 0$.

Ответ: $(-14/9; 2)$.

Пример 160. Решить уравнение: $(a+1)x^2-(2a-1)x-5+a=0$ относительно неизвестной x.

Решение. Если $a+1=0, a=-1$ получим $3x-6=0$ или $x=2$. Если $a+1\neq 0$, то исходное уравнение – квадратное. При $D=(2a-1)^2-4(a+1)(-5+a)=12a+21\geqslant 0$ или $a\geqslant -7/4$ это уравнение имеет корни $x_{1,2}=(2a-1\pm\sqrt{12a+21})/(2(a+1))$.

Ответ: при $a\in(-\infty;-7/4)$ – решений нет, при $a=-1, x=2$; при $a\in[-7/4;-1)\cup(-1;+\infty)$, $x_{1,2}=(2a-1\pm\sqrt{12a+21})/(2(a+1))$.

Пример 161. Найти все значения параметра a, при котором уравнение $(a-2)x^2-(2a+1)x-3+a=0$ имеет один корень.[1]

Решение. Если $a-2=0$, то это уравнение не квадратное и оно может иметь один корень. Проверим это, подставив в него $a=2$: $-5x-1=0, x=-1/5$. Если $a-2\neq 0, a\neq 2$, то это квадратное уравнение, которое имеет один корень, только если $D=0$, т. е. $(2a+1)^2-4(a-2)(-3+a)=24a-23=0$ или $a=23/24$. Ответ: $-1/5, 23/24$.

Пример 162. Найти значение параметра a, при котором абсцисса вершины параболы $y=7(3+4x)(2a-x)$ находится в точке $x_0=2$.

Решение. Найдём точки пересечения параболы $y=f(x)$ с осью OX: $3+4x=0$ или $2a-x=0$. Откуда $x_1=-3/4, x_2=2a$. Так как абсцисса вершин параболы находится посередине корней, то $x_0=(x_1+x_2)/2$, или $x_0=(-3/4+2a)/2=2$. Ответ: $2^3/_8$.

Пример 163. Найти все a, при котором решения уравнения $x^2+2x-8=0$ принадлежат отрезку с концами $2a-3$ и $3a+8$.

Решение. Решим уравнение: $x_1=-4, x_2=2$. Так как неизвестно, какое из чисел $2a-3$ или $3a+8$ больше, то необходимо рассмотреть два варианта (см. рис. 82):

a). рис. 82. b).

$\begin{cases} 2a-3\leqslant -4 \\ 3a+8\geqslant 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2a-3\geqslant 2 \\ 3a+8\leqslant -4 \end{cases}$. Вторая система неравенств решений не имеет, а из первой получим: $-2\leqslant a\leqslant -1/4$. Ответ: $[-2; -1/4]$.

Пример 164. Найти все значения параметра a, при котором корни уравнения $x^2-3ax+2a-12=0$ расположены по разные стороны от 1.

[1]Заметим, что, например, уравнение $(x-1)^2=0$ имеет *два совпадающих корня* $x=1$ или один корень $x=1$ *кратности* два. В дальнейшем не будем изучать кратность корня, поэтому с этой точки зрения уравнение $(x-1)^2=0$ только один корень $x=1$.

Решение. Обозначим левую часть уравнения как $f(x)$. График функции $y = f(x)$ – парабола ветвями вверх. Для того, чтобы корни уравнения $f(x) = 0$ были бы расположены по разные стороны от 1, достаточно, чтобы график функции $y = f(x)$ имел вид, изображённый на рис. 83, то есть $f(1) < 0$.

рис. 83.

Откуда $1^2 - 3a \cdot 1 + 2a - 12 < 0$. Ответ: $a \in (-11; +\infty)$.

Пример 165. Найти все значения параметра a, при котором произведение двух различных корней уравнения $12x^2+12(a+2)x+5a^2+14a = 0$ меньше 2.

Решение. Известно, что $D > 0$ – необходимое и достаточное условие существования двух различных корней квадратного уравнения:

$144(a+2)^2 - 12 \cdot 4 \cdot (5a^2 + 14a) > 0 \qquad : (4 \cdot 12 \cdot (-2))$

$a^2 + a - 6 = (a-2)(a+3) < 0.$

По условию произведение корней должно быть меньше 2, но по теореме Виета произведение корней равно частному свободного члена квадратного уравнения на коэффициент при старшем члене, поэтому:

$(5a^2 + 14a)/12 < 2$ или $(a+4)(a-1.2) < 0$.

Ответ: $(-3; 1.2)$.

рис. 84.

Пример 166. Найти все значения параметра a, при котором сумма двух различных корни уравнения $x^2 + (a-1)x - a(a+2) = 0$ положительна.

Решение. Известно, что $D > 0$ – необходимое и достаточное условие существования двух различных корней квадратного уравнения:

$(a-1)^2 + 4a(a+2) > 0$ или $5(a+1)(a+0.2) > 0$.

По условию сумма корней положительна, поэтому по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\dfrac{a-1}{1} > 0$ или $a < 1$. Ответ: $(-\infty; -1) \cup (-0.2; 1)$.

Пример 167. Найти все значения параметра a, при котором корни уравнения $y = x^2 - 2ax - 6 + 5a = 0$ принадлежат отрезку $[-2; 7]$.

Решение. Для того, чтобы корни уравнения принадлежали отрезку $[-2; 7]$ достаточно потребовать, чтобы график функции $y = x^2 - 2ax - 6 + 5a$ имел бы вид как на рис. 85.

рис. 85.

Из графика видно (рис. 86.), что корни квадратного уравнения принадлежат отрезку $[-2;7]$, если:

$$\begin{cases} D \geqslant 0 \\ -2 \leqslant x_0 \leqslant 7 \\ f(-2) \geqslant 0 \\ f(7) \geqslant 0 \end{cases} \begin{cases} (a-2)(a-3) \geqslant 0 \\ -1 \leqslant a \leqslant 3.5 \\ a \geqslant 2/9 \\ a \leqslant 43/9 \end{cases}$$

Ответ: $[2/9;2] \cup [3;3.5]$.

Замечание. Если бы в условии было сказано, что корни квадратного уравнения должны быть различны, то необходимо потребовать $D > 0$. В этом случае ответ был бы $[2/9;2) \cup (3;3.5]$.

рис. 86.

7.3 Решение неравенств с параметром.

Пример 168. Решить неравенство $\dfrac{x-2a+1}{3a-4x+2} \geqslant 0$ относительно неизвестной переменной x при различных значениях параметра a.

Решение. Решаем неравенство методом интервалов, в котором необходимо знать и расположить корни на числовой оси. Перепишем условия, выделяя корни: $\dfrac{x-(2a-1)}{-4(x-(\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}))} \geqslant 0$. Откуда $x_1 = 2a-1, x_2 = 3a/4 - 1/2$.

1) Пусть $x_1 > x_2$ или $2a-1 > 3a/4 - 1/2$, тогда $a > 6/5$ и из рис. 87 a) следует решение $x \in (3a/4 - 1/2; 2a-1]$.

2) Пусть $x_1 < x_2$ или $2a - 1 < \frac{3}{4}a - \frac{1}{2}$. Следовательно $a < 6/5$, тогда $x \in [2a-1, 3a/4 - 1/2)$.

a). рис. 87. b).

3). Если $x_1 = x_2$, или $2a-1 = 3a/4-1/2, a = 6/5$, то $(x-6/5)/(6/5-x) \geqslant 0$ – решений нет.

Ответ: при $a < \dfrac{6}{5}, x \in [2a-1, \dfrac{3}{4}a - \dfrac{1}{2})$; при $a = \dfrac{6}{5}$ решений нет; при $a > \dfrac{6}{5}, x \in (\dfrac{3}{4}a - \dfrac{1}{2}, 2a-1]$.

Пример 169. Найти множество всех значений параметра a, при которых неравенство $\dfrac{x-a}{x-3a+1} \leqslant 0$ выполняется при всех значениях переменной x, принадлежащих отрезку [2;3]

Решение. Решаем методом интервалов, для чего отметим корни: $x_1 = a, x_2 = 3a - 1$ (рис. 88).

1). Пусть $a < 3a - 1$, тогда $a > \dfrac{1}{2}$ и решения неравенства находятся в промежутке между корнями $x_1 = a$ и $x_2 = 3a - 1$.

В условии сказано, что неравенство должно выполняться для всех значений переменной x из промежутка $[2; 3]$, поэтому он должен содержаться в решении неравенства. Если вложить отрезок $[2; 3]$ в $[a; 3a-1)$, то левые границы могут совпасть, а вот правые – нет, так как граница [содержит границы [и (, а граница вида (– только (.

$$\begin{cases} a > 1/2 \\ 2 \geqslant a \\ 3 < 3a - 1 \end{cases} \begin{cases} 2 \geqslant a \\ \dfrac{4}{3} < a \end{cases}$$

а). рис. 88. b). Откуда $4/3 < a \leqslant 2$.

2). Пусть $a > 3a - 1$, то $a < 1/2$ и отрезок $[2; 3]$ должен содержаться в $(3a - 1; a]$:

$$\text{при } a < 1/2 \begin{cases} 2 \geqslant 3a - 1 \\ 3 \leqslant a \end{cases} \begin{cases} 1 \geqslant a \\ 3 \leqslant a \end{cases} \text{ – решений нет.}$$

3). Пусть $a = 3a - 1$, то $a = 0.5$. Тогда исходное неравенство примет вид: $\dfrac{x-0.5}{x-0.5} \leqslant 0$, что неверно ни при каком x. Ответ: $(4/3; 2]$.

Пример 170. Найти все положительные значения параметра a, при котором из неравенства $|x - 1.8| < a$ следует неравенство:
$x^3 - 4x^2 + 3x < 0$.

Пусть $a > 0$, тогда $1.8 - a < x < 1.8 + a$. Методом интервалов найдём решения второго неравенства:
$x^3 - 4x^2 + 3x = x(x^2 - 4x + 3) = x(x-3)(x-1) < 0$ (рис. 89).

рис. 89.

Для того, чтобы область решений неравенства A входила в область решений неравенства B необходимо, чтобы интервал $(1.8 - a; a + 1.8)$ входил бы либо в промежуток $(1; 3)$ либо в интервал $(-\infty; 0)$. Очевидно, что интервал $(-\infty; 0)$ никак не подходит, так как он не содержит точку

1.8, которую содержит $(1.8-a; a+1.8)$. Остаётся второй вариант. Тогда

$$\begin{cases} 1.8-a \geqslant 1 \\ 1.8+a \leqslant 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a \leqslant 0.8 \\ a \leqslant 1.2. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 0.8]$.

Пример 171. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств $\begin{cases} ax+a > x \\ x-a < -4.5 \end{cases}$ не имеет решений.

Решение. Приведём условие к виду: $\begin{cases} (a-1)x > -a \\ x < -4.5+a \end{cases}$

Если $a-1=0, a=1$, то $\begin{cases} 0 \cdot x > -1 \\ x < -3.5 \end{cases}$ – решения есть.

Если $a-1<0, a<1$, то $\begin{cases} x < -a/(a-1) \\ x < -4.5 \end{cases}$ – решения также есть.

Если $a-1>0, a>1$, то $\begin{cases} x > -a/(a-1) \\ x < -4.5+a \end{cases}$. Из рис. 90 видно, что решения есть только тогда , когда $-a/(a-1) \geqslant -4.5+a$ или

$$\frac{(a-3)(a-1.5)}{a-1} \leqslant 0$$

Ответ: $(1.5; 3)$.

рис. 90.

Пример 172. Найти все значения параметра a, при котором из неравенства $x^2-5x+6<0$ следует неравенство $x^2-2ax^2-1+a<0$.

Решение. Найдём решения первого неравенства: $2<x<3$. Представим левую часть второго неравенства как функцию $f(x)=x^2-2ax-1+a$. Из условия следует, что множество решений первого неравенства должны содержаться в множестве решений второго неравенства.

Следовательно, при всех $x \in (2;3)$ должно быть $f(x)<0$, то есть область решений первого содержится в области решений второго неравенства. Так как ветви параболы $y=f(x)$ направлены вверх, то возможны только те расположения параболы, которые указаны на рис. 91. Из рисунка видно, что достаточно потребовать, чтобы:

рис. 91.

$$\begin{cases} f(2)<0 \\ f(3)<0 \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} a>1 \\ a>8/5 \end{cases}$$

Ответ: $(8/5; +\infty)$.

Пример 173. Найти все значения параметра a, при которых неравенство
$(x-2)(x-a+3) \geqslant 0$ верно при всех $x \leqslant 1$.

Решение. При $x \leqslant 1$ всегда $x-2<0$, поэтому $x-a+3 \leqslant 0$ или $x \leqslant a-3$.

Чтобы выполнялось это неравенство при всех $x \leqslant 1$, как видно из рис. 92, достаточно потребовать, чтобы область $x \leqslant 1$ полностью содержалась бы в области $x \leqslant a-3$, то есть $a-3 \geqslant 1$.

Ответ: $a \geqslant 4$.

рис. 92.

7.4 Смешанные задачи с параметром.

Пример 174. Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x)=\sqrt{a+x-2}\log_2(3-x+3a)$ определена.

Решение. Найдём О. Д. З.

$$\begin{cases} a+x-2 \geqslant 0 \\ 3-x+3a>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geqslant 2-a \\ x<3+3a \end{cases}$$

Из рис. 93 понятно, что достаточно потребовать, чтобы $2-a<3+3a$. Ответ: $a>-0.25$.

рис. 93.

Пример 175. При каком значении параметра a уравнение $5^{2x-3}=4a$ имеет только отрицательные корни?

Решение. При $a>0$ из определения логарифма следует, что $2x-3=\log_5(4a)$. Так требуется, чтобы $x<0$, то $\frac{1}{2}(\log_5(4a)+3)<0$, откуда $\log_5(4a)<\log_5 1/125$. Ответ: $0<a<1/500$.

Пример 176. При каком значении параметра a уравнение $\log_2(x+3)-\log_2(a-4)=0$ имеет только отрицательные корни?

Решение. О. Д. З.: $x>-3, a>4$. Решаем уравнение: $\log_2(x+3)=\log_2(a-4)$, следовательно на О. Д. З.: $x+3=a-4$ или $x=a-7<0$. Ответ: $(4;7)$.

Пример 177. При каком значении параметра a функция $f(x)=ax+2x+1$ положительна при всех $x \geqslant 2$?

Решение. График $y=(a+2)x+1$ – прямая линия.

Если $a=-2$, то это прямая $y=1$, параллельная оси OX (рис. 94 а)).

Если $a < -2$, то угол наклона прямой – тупой и как следует из рис. 94 b) ни при каком $a < -2$ функция не может быть положительна для всех $x \geqslant 2$.

a). b). c).

рис. 94.

Если $a > -2$, то угол наклона – острый и как следует из рисунка 94 c) достаточно потребовать, чтобы $f(2) \geqslant 0$, то есть $2a + 5 \geqslant 0$ или $a \geqslant -5/2$. Ответ: $a \geqslant -2$.

Пример 178. Найти минимальное значение функции $f(x) = |x-a|+1$ на отрезке $[1; 3]$.

a). b). c).

рис. 95.

Решение. Если $1 \leqslant a \leqslant 3$, то график функции $y = |x - a| + 1$ имеет вид как на рис. 95 a). Из рисунка видно, что в этом случае $\min f(x) = 1$.

Если $a > 3$, то график заданной функции имеет вид как на рис. 95 b). Из рисунка видно, то тогда $\min f(x) = f(3) = |3 - a| + 1$, но т. к. $a > 3$, то $\min f(x) = -(3 - a) + 1 = a - 2$.

Если $a < 1$, то график заданной функции имеет вид как на рис. 95 c), откуда видно, что $\min f(x) = f(1) = |1 - a| + 1 = 1 - a + 1 = 2 - a$.

$$\text{Ответ: } \min_{x\in[1;3]} f(x) = \begin{cases} a-2, & a > 3 \\ 1, & a \in [1;3] \\ 2-a, & a < 1. \end{cases}$$

Пример 179. При каком значении параметра a на отрезке $[0°; 360°]$ уравнение $\sin^2 x - 2\sqrt{a+3}\sin x = 0$ имеет более трёх различных корней?

Решение. Вынесем $\sin x$ за скобку, тогда: $\sin x(\sin x - 2\sqrt{a+3}) = 0$. Откуда при $x \in [0^\circ, 360^\circ]$

$$1).\quad \begin{gathered} \sin x = 0 \\ x = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ \end{gathered} \qquad 2).\quad \begin{gathered} \sin x - 2\sqrt{a+3} = 0 \\ \sin x = 2\sqrt{a+3} \end{gathered}$$

Первое уравнение дало три различных корня. Чтобы выполнить требование задачи необходимо найти ещё хотя бы один корень, **отличный** от уже найденных, что возможно, если $0 < \sin x = 2\sqrt{a+3} \leqslant 1$ или $-3 < a \leqslant -2\frac{3}{4}$. Ответ: $x \in (-3; -2\frac{3}{4}]$.

Пример 180. Найти количество корней уравнения $x^3 - 27x - 20 - a = 0$ при различных значениях параметра a.

Решение. Запишем условие в виде $x^3 - 27x - 20 = a$ и будем находить корни уравнения как точки пересечения графиков функций $f(x) = x^3 - 27x - 20$ и $g(x) = a$. Построим график функции $f(x)$.

1. $x \in R, f'(x) = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9)$
2. $f'(x) = 0$. Откуда $x = \pm 3$.
3. Находим промежутки монотонности: (рис. 96):

рис. 96.

4. $f(-3) = -27 + 81 - 20 = 34, f(3) = 27 - 81 - 20 = -74$.
5. Строим графики функций. График функции $y = f(x)$ – кубическая парабола, а график функции $y = g(x)$ – прямая, параллельная оси OX. Из рис. 97 получим решение задачи.

Ответ: при $a < -74, a > 34$ – один корень;

при $a = -74, a = 34$ – два корня;

при $-74 < a < 34$ – три корня.

рис. 97.

Пример 181. Найти количество корней уравнения $(x-1)(x^2 - 4x - 12) = a(x-1)$ при различных значениях параметра a.

Решение. Будем решать задачу графически. Из условия следует, что один корень есть при любом a – это $x = 1$. Отметим его на плоскости как график функции $x = 1$ (рис. 98).

рис. 98.

Пусть теперь $x \neq 1$, тогда исходное уравнение разделим на $x - 1$: $x^2 - 4x - 12 = a$. Построим график функции $f(x) = x^2 - 4x - 12$ в той же системе координат.

Тогда количество различных корней исходного уравнения – это количество точек пересечения графиков $y = f(x)$ и $y = g(x) = a$.

Найдем координату точки пересечения графиков: $x = 1$ и $y = f(x)$. Для этого достаточно найти $f(1) = -15$. Из рис. 98 следует решение задачи.

Ответ: при $a < -16$ – один корень; при $a = -16, a = -15$ – два корня; при $a > -16, a \neq 15$ – три корня.

Пример 182. Найти количество корней уравнения $(x^2+2x)^2-4(x^2+2x)-a=0$ при различных значениях параметра a.

Решение. Представим уравнение в виде $(x^2+2x)^2-4(x^2+2x)=a$ и будем решать задачу *методом композиций*. Построим график функции $y = f(x) = x^2+2x$ (рис. 99 a)). Видно, что $E(f) = [-1; +\infty)$.

Построим график функции $z = h(y) = y^2 - 4y$ (рис. 99 b)). В той же системе координат построим функцию $g(x) = a$ для разных a.

Из графиков 99 a) и b) видим, что: если $a < -4$, то корней нет; если $a = -4$, то $y = 2$, но при $y = 2$ по графику 99 a). находим две точки пересечения; если $-4 < a < 5$, то имеется две точки пересечения с графиком $z = h(y)$ (рис. 99 b)), которые соответствуют, как следует из рис. 99 a), четырём корням; если $a = 5$, то имеется три корня; наконец, если $a > 5$, то – два корня.

a). рис. 99. b).

7.5 Задания.

212. Решить уравнение относительно неизвестной x:

1). $x - 2ax - 3 = 3a$ 2). $a - x - a^2 = -2 - a^2x$

3). $2a^2x - a = 6x + ax - 2$.

213. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

1). $ax - 2x + a = 1$ 2). $a^2 - 4ax - a = 2 + 12x$

3). $a^2x - 3ax - a = 0$

не имеет решений.

214. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

1). $3ax + 2x + a^2x + a^2 = 6 + a$ 2). $a^2x + 2ax - a = 0$

3). $3a^2x - ax - a = 2x - 1$

имеет бесконечно много решений.

215. Решить систему уравнений относительно неизвестных x и y.

1). $\begin{cases} ax + 2y = a \\ 3x - y = 2 - a \end{cases}$ 2). $\begin{cases} x + ay = a \\ (a-1)x + 2y = 2a - 2 \end{cases}$

3). $\begin{cases} (a-1)x + (a+2)y = a - 1 \\ ax + 2ay = 2a - 4. \end{cases}$

216. Найти все значения параметров a и b, при которых система уравнений не имеет решений:

1). $\begin{cases} ax + y = 2 \\ x + 2y = b - 1 \end{cases}$ 2). $\begin{cases} x + (a-1)y = a \\ 3x - ay = b + 2. \end{cases}$

217. Найти все значения параметров a и b, при которых система уравнений имеет бесконечно много решений:

1). $\begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = a + b \end{cases}$ 2). $\begin{cases} 6ax + (a+1)y = b \\ (a+2)x + ay = b + 2. \end{cases}$

218. Найти все значения параметра a, при которых прямые не пересекаются, если:

1). $y = 2ax - 1$ и $y = x + 3$ 2). $y = ax + 2$ и $x + y = a - 1$.

219. Найти все значения параметра a, при которых прямые $y = x - 2$ и $y = 2x + a - 1$ пересекаются в IV четверти $(x > 0, y < 0)$.

220. Найти все значения параметра a, при которых прямые $4ax + y = 2$ и $x + ay = 1$ пересекаются в III четверти $(x < 0, y < 0)$.

221. Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x) = (a-2)x + a + 3$ больше 4 при всех $x \geqslant -2$.

222. Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x) = ax + 2a - 1$ положительна при всех $x \geqslant 1$.

223. Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x) = (2a+4)x + 3a + 8$ положительна при всех $x \geqslant 1$.

224. Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x) = (a-2)x - a + 2$ меньше 2 при всех $x \geqslant 3$.

225. Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x) = ax - 3x + 2a - 4$ больше 1 при всех $x < 3$.

226. Найти все значения параметра a, при которых площадь фигуры, образованного прямыми $y = 0, x = 0, y = a - x - 2$ равна 32.

227. Найти все значения параметра a, при которых площадь треугольника, образованного осями координат и прямой $y = 2x - a + 4$ равна 25.

228. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $ax - 2 \geqslant a$ не имеет решений.

229. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $ax - 1 < x$ справедливо при любом x.

230. Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x)$ определена хотя бы в одной точке.

1). $f(x)=\sqrt{x+a-1}+\log_2(2a+4-x)$

2). $f(x)=\log_2(2x-a-9)+\log_4(4a+1-x)$

3). $f(x)=\sqrt{3x+4-a}-\sqrt{a-x+6}$ 4). $f(x)=\dfrac{\log_5(3x-a-2)}{\sqrt{a-x-4}}$

231. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

1). $\begin{cases} x+2a<3 \\ ax\geqslant a \end{cases}$ 2). $\begin{cases} x-4a-2>0 \\ ax<x+4 \end{cases}$ имеет решения.

232. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

1). $\begin{cases} x+a-1\geqslant 0 \\ ax-a+9<0 \end{cases}$ 2). $\begin{cases} x+2a-4<0 \\ ax-x\geqslant 2a-4 \end{cases}$ не имеет решений.

233. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2-2x-a-4=0$ разного знака.

234. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $2x-x^2-a+4=0$ расположены по разные стороны от числа -1.

235. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $3x^2+10x-a+5=0$ расположены по разные стороны от числа -3.

236. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $5x-x^2-8+2a=0$ расположены по разные стороны от числа 2.

237. Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет более двух корней:

1). $(a^2-4)x^2-(a^2-2a)x+a^2-a-2=0$

2). $(a^2+3a)x^2+(a^2-a-12)x+a^2+a-6=0.$

238. Найти все значения параметра a, при которых уравнение не имеет решений:

1). $x^2-x-3+a=0$ 2). $ax^2+2ax-1=0.$

239. Найти все значения параметра a, при которых функция определена при всех x, если:

1). $f(x)=\sqrt{ax^2-(4a-1)x+3+4a}$

2). $f(x)=\log_2((a-2)x^2+2(a-2)x-1+a)$

3). $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(a-3)x^2-2(a-3)x+4+a}}.$

240. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения различны и положительны:

1). $x^2+2ax+9=0$ 2). $2x^2+(a-1)x+2=0.$

241. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения

1). $x^2-7x+10=0$ 2). $x^2-x=12$ 3). $x^2+2x=8$

принадлежат отрезку, с концами $3a+4$ и $2a-4$.

242. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2+2(a-1)x+4=0$ принадлежат отрезку $[1;3]$.

243. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $-2x^2+(a+2)x-2=0$ принадлежат отрезку $[-2;1]$.

244. При каких значениях параметра a произведение двух различных корней уравнения $x^2+4x-a+2=0$ больше 3?

245. При каких значениях параметра a произведение двух различных корней уравнения $x^2-ax+a^2-3=0$ не меньше -2?

246. При каких значениях параметра a сумма двух различных корней уравнения $x^2+2(a-3)x+a^2-3=0$ меньше 3?

247. При каких значениях параметра a сумма двух различных корней уравнения $x^2+3(a-1)x+a^2-6a+2=0$ не меньше -6?

248. Найти все значения параметра a, при которых графики функций $f(x)$ и $g(x)$ пересекаются только в одной точке, если:

1). $f(x)=ax^2+x-1, \qquad g(x)=x^2+2ax-a$

2). $f(x)=ax^2+x+3, \qquad g(x)=3ax+2.$

249. Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет один корень:

1). $ax^2-(a-1)x+a/4=0$ 2). $(a-2)x^2-2(a+3)x-4+a=0.$

250. Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x)=x^2+2(a-4)x+3$ возрастает при всех $x\geqslant 2$.

251. Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x)=3(a+1)x-x^2-4$ возрастает при всех $x\leqslant -3$.

252. Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x)=ax^2+(a-2)x+2$ убывает при всех $x\leqslant 1$.

253. Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x)=(a+2)x^2+(a-1)x+3$ возрастает при всех $x\geqslant 4$.

254. Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет более двух различных корней на отрезке $[0;2\pi]$.

1). $2\cos^2 x-3\sqrt{a-1}\cdot\cos x=0$ 3). $\cos^2 x-4\sqrt{2+3a}\cdot\cos x=0.$

2). $\cos^2 x+\sqrt{3-a}\cdot\cos x=0$

255. Найти количество корней уравнения при различных значениях параметра a, если:

1). $x^3+x=a$	5). $-4(x^2+4x)-(x^2+4x+3)^2=a$
2). $-3x^2+1=a-2x^3$	6). $(x+2)(x^2-3x+2)=a(x+2)$
3). $(x^2+2x)^2-8(x^2+2x)=a$	7). $(x-3)(a+x+x^2-6)=0$
4). $(x^2-x)^2+2(x^2-x)=a$	8). $(x+2)(x^2-2x-7-a)=0.$

256. Найти все значения параметра a, при которых из неравенства A следует неравенство B, если:
1). $A: x^2-3x+2\leqslant 0,\quad B: x^2+3ax-2a\leqslant 0$
2). $A: 2-x-x^2\geqslant 0,\quad B: x^2+2ax-3\leqslant 0$
3). $A: x^2-4x-5<0,\quad B: |x-4|\leqslant a.$

257. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(x-2)(x+a-2)\geqslant 0$ верно при всех $x\geqslant 3$.

258. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(x-4)(3+2a-x)\leqslant 0$ верно при всех $x\leqslant 4$.

259. Найти все значения параметра a, при которых уравнение
1). $2^{x+2}=3a$ 2). $\log_3(3x+9)=2a$ 3). $\sqrt{x+2-3a}-\sqrt{8-a}=0$
имеет только положительные корни.

260. Найти все значения параметра a, при которых уравнение
1). $5^{2x-1}=4a$. 2). $\dfrac{\lg(2x+1)}{\lg(5-a)}=1$ 3). $\log_2(x+1)-\log_2(a-3)=0$
имеет только не положительные корни.

261. Найти максимальное значение функции $f(x)=2-|x+a|$ на отрезке $[-2;1]$.

262. Найти минимальное значение функции $f(x)=2+|2x+6a|$ на отрезке $[3;6]$.

Ответы.

212. 1). Если $a=\frac{1}{2}$, то решений нет; если $a\neq\frac{1}{2}$, то $x=\frac{3(a+1)}{1-2a}$ 2). Если $a=1$ – решений нет; если $a=-1$, то x – любое число; если $a\neq\pm1$, то $x=\frac{a-2}{a-1}$ 3). Если $a=-\frac{3}{2}$ – решений нет; если $a=2$, то x – любое; если $a\neq\{2,-\frac{3}{2}\}$, то $x=\frac{1}{2a+3}$. 213. 1). $a=2$ 2). $a=-3$ 3). $a=3$. 214. 1). $a=-2$ 2). $a=0$ 3). $a=1$. 215. 1). Если $a=-6$, то решений нет; если $a\neq-6$, то $x=\frac{4-a}{6+a}, y=\frac{a(a+1)}{6+a}$ 2). Если $a=-1$, то решений нет; если $a=2$, то $y=C, x=2(1-C)$, C – любое; если $a\neq\{-1,2\}$, то $x=\frac{2a}{a+1}, y=\frac{a-1}{a+1}$ 3). Если $a=0$, то решений нет; если $a=4$, то $y=C, x=1-2C$, C – любое; если $a\neq\{0,4\}$, то $x=-\frac{2}{a}, y=\frac{a-1}{a}$. 216. 1) $a=\frac{1}{2}, b\neq 5$ 2) $a=\frac{3}{4}, b\neq\frac{1}{4}$. 217. 1) $a=1, b=1$ или $a=-1, b=-1$ 2) $a=-\frac{2}{5}, b=-\frac{6}{5}$ или $a=1, b=-4$. 218. 1) $a=\frac{1}{2}$, 2). $a=-1$. 219. $(-3;-1)$. 220. $(-\infty;-\frac{1}{2})$. 221. $[2;3)$. 222. $a>\frac{1}{3}$. 223. $a\geqslant-2$. 224. $a\leqslant 2$. 225. $a\in(\frac{14}{5};3]$. 226. $-6,10$. 227. $-6,14$. 228. $a=0$. 229. $a=1$.
230. 1). $a>-1$ 2). $a>1$ 3). $a\geqslant-11$ 4). $a>7$
231. 1). $(-\infty;1)$ 2). $(-\infty;\frac{3}{2})$. 232. 1). $[0;3]$ 2). $[2;+\infty)$.

233. $(-4;+\infty)$. 234. $(-\infty;1)$. 235. $(2;+\infty)$. 236. $(1;+\infty)$.
237. 1). $a=2$ 2). $a=-3$. 238. 1) $a>\frac{13}{4}$ 2). $(-1;0]$.
239. 1). $a\geqslant\frac{1}{20}$ 2). $a\geqslant 2$ 3) $a\geqslant 3$. 240. 1). $a<-3$
2). $a<-3$. 241. 1). $[\frac{1}{3};3]$ 2). $[0;\frac{1}{2}]$. 3). $[-\frac{2}{3};0]$. 242.$[-\frac{7}{6};-1]$.
243. $[-7;-6]\cup\{2\}$. 244. $(-2;-1)$
245. $(-2;-1]\cup[1;2)$ 246. $(1.5;2)$ 247. $(-\infty;-1)\cup(-\frac{1}{5};3]$
248. 1). $a=\{\frac{3}{4},1\}$ 2). $a=\{0;\frac{1}{9},1\}$.
249. 1). $\{0,\frac{1}{2}\}$ 2). $\{-\frac{1}{12},2\}$. 250. $a\geqslant 2$. 251. $a\geqslant -3$.
252. $0\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$. 253. $a\geqslant-\frac{5}{3}$. 254. 1). $(1;\frac{13}{9}]$ 2). $[2;3)$
3). $(-\frac{2}{3};-\frac{31}{48}]$. 255. 1). При всех a – 1 корень 2). При $a\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ – 1 корень; при $a=0, a=1$ – 2 корня; при $a\in(0;1)$ – 3 корня. 3). При $a<-16$ – корней нет; при $a=-16$ – 2 корня; при $a\in(-16;9)$ – 4 корня; при $a=9$ – 3 корня; при $a>9$ – 2 корня. 4). При $a<-\frac{7}{16}$ – корней нет; при $a=-\frac{7}{16}$ – 1 корень; при $a>-\frac{7}{16}$ – 2 корня 5). При $a>15$ – корней нет; при $a=15$ – 1 корень; при $a<15$ – 2 корня 6). При $a<-\frac{1}{4}$ – 1 корень; при $a=-\frac{1}{4}, a=12$ – 2 корня; при $a>-\frac{1}{4}, a\neq 12$ – 3 корня 7). При $a>\frac{25}{4}$ – 1 корень; при $a=\frac{25}{4}, a=-6$ – 2 корня; при $a<\frac{25}{4}, a\neq-6$ – 3 корня 8). При $a<-8$ – 1 корень; при $a=-8, a=1$ – 2 корня; при $a>-8, a\neq 1$ – 3 корня. 256. 1). $(-\infty;-1]$ 2). $[\frac{1}{4};1]$
3). $[5;+\infty)$. 257. $[-1;+\infty)$. 258. $[\frac{1}{2};+\infty)$ 2). $[2;+\infty)$.
259. 1). $a>\frac{4}{3}$ 2). $a>1$ 3). $(-3;8]$
260. 1). $(0;\frac{1}{20}]$ 2). $a\in[4;5)$ 3). $a\in(3;4]$.
261. Если $a<-1$, то $\max f(x)=3+a$; если $-1\leqslant a\leqslant 2$, то $\max f(x)=2$; если $a>2$, то $\max f(x)=4-a$.
262. Если $a<-2$, то $\min f(x)=-10-6a$; если $-2\leqslant a\leqslant-1$, то $\min f(x)=2$; если $a>-1$, то $\min f(x)=8+6a$.

Глава 8

Геометрия.

При решении геометрических задач необходимо уверенное знание свойств геометрических фигур и формул школьной геометрии. Размеры этого пособия не позволяют выписать все необходимые формулы и свойства и их доказательства, поэтому остановимся только на основных.

Теорема 1 (о внешнем угле треугольника). *Внешний угол треугольника равен сумме его внутренних углов, не смежных с ним.*

Действительно, так как сумма всех внутренних углов треугольника равна 180°, то есть $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ и $\gamma + \varphi = 180^\circ$ (см. рис.100), то $\varphi = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Теорема доказана.

рис. 100. рис. 101.

Пример 183. В равнобедренном треугольнике на рис. 101 найти угол α.

Решение. Так как по условию треугольник ABC равнобедренный, то пусть $\angle ABC = \angle BCA = \varphi$. Угол $\angle ACD$ – внешний угол треугольника ABC, поэтому $\alpha + \varphi = 125^\circ$. Сумма внутренних углов треугольника равна 180°, поэтому $\underbrace{\alpha + \varphi}_{125^\circ} + \varphi = 180^\circ$. Следовательно $\varphi = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$. Но тогда $\alpha = 125^\circ - 55^\circ = 70^\circ$. Ответ: 70°.

Пример 184. В треугольнике против угла 32° проведены биссектрисы двух других углов. Найти острый угол, образованный этими биссектрисами.

Решение. Пусть в треугольнике ABC угол $\angle B = \beta, \angle C = \gamma$, острый угол между биссектрисами BG и CF равен φ (рис. 102). Сумма внутренних углов треугольника равна $180°$, поэтому $32° + \gamma + \beta = 180°$, откуда $\gamma + \beta = 148°$. Но, так как угол φ – внешний угол треугольника OBC, а BG и CF – биссектрисы, то $\varphi = \beta/2 + \gamma/2 = 148°/2 = 74°$. Ответ: $74°$.

рис. 102.

Центральный угол – это угол в окружности, образованный двумя радиусами r_1 и r_2, опирающимися на дугу $\overset{\smile}{AB}$ (на рис. 103 a) дуга выделена), а *вписанный угол* – это угол в окружности образованный хордами, исходящими из общей точки на окружности ($\angle ACB$).

Теорема 2 (о связи вписанного и центрального углов окружности). *Центральный угол вдвое больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу.*

Это утверждение ясно из рис. 103 b), когда BC диаметр. Здесь φ – внешний угол, α – вписанный, откуда по Теореме 1 $\alpha = \varphi/2$, так как треугольник AOC – равнобедренный. В случае произвольного расположения вписанного в окружность угла доказательство утверждения следует из рисунков c) и d). На рис. c) $\angle ACB = \gamma + \beta = \phi/2 + \psi/2 = \varphi/2$. На рис. d) $\angle ACB = \beta - \gamma = \phi/2 - \psi/2 = \varphi/2$.

a) b) c) d)

рис. 103.

Пример 185. Угол $\angle ACB$ пересекает окружность в четырёх точках так, что угловые величины дуг окружности, заключённые в угле $\angle ACB$ равны $128°$ и $26°$. Найти величину угла $\angle ACB$.

рис. 104.

Решение. Сделаем черчёж (рис. 104), где $\overset{\smile}{EG} = 128°$ и $\overset{\smile}{FK} = 26°$.

Параллельно лучу CB проведём хорду FN, тогда $\angle C = \angle F = \frac{1}{2}\overset{\smile}{EN}$ и $\overset{\smile}{FK}=\overset{\smile}{GN}$. Но $\overset{\smile}{EN}=\overset{\smile}{EG}-\overset{\smile}{NG}$. Откуда $\angle C = \frac{1}{2}(128^\circ - 26^\circ) = 51^\circ$. Ответ: 51°.

Окружность, описанная вокруг треугольника. К каждой стороне треугольника ABC проведём серединные перпендикуляры (рис. 105). Из рисунка видно, что все они пересекаются в одной точке O. Следовательно расстояния от вершин треугольника до точки O равны, поэтому *центр описанной вокруг треугольника окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров.* Справедлива формула площади треугольника, если известен радиус R описанной вокруг него окружности и длины всех его сторон a, b, c:

$$S_\triangle = \frac{abc}{4R}. \tag{8.1}$$

рис. 105.

Действительно, из рис. 106 видим, что

$$S = \tfrac{1}{2}ab\sin\varphi = \tfrac{1}{2}ab\frac{c/2}{R} = \tfrac{1}{4}abc/R.$$

Пример 186. Радиус, описанной вокруг равнобедренного треугольника окружности, равен 5, длина боковой стороны относится к длине основания как 5:3. Найти длины сторон треугольника, если его площадь равна 810.

рис. 106.

Решение. Обозначим через x длину одной части, тогда по формуле 8.1 получим: $810 = \dfrac{3x\cdot 5x\cdot 5x}{4\cdot 5}$. Откуда $x = 6$. Ответ: 30, 30, 18.

рис. 107.

рис. 108.

Окружность, вписанная в треугольник. Пусть в треугольник ABC вписана окружность с центром O, где OA', OB' и OC' – её радиусы (рис. 107). Так как $|OA'| = |OB'| = |OC'| = r$, то треугольники OAC' и OAB' равны. Равны также треугольники OCA' и OCB' и OBC' и OBA'.

Откуда делаем вывод, что *центр вписанной окружности находится в точке пересечения его биссектрис.*

Из равенства указанных треугольников следует ещё один важный вывод относительно длин отрезков, на которые делятся стороны треугольника в точках касания с окружностью:

$$|C'A| = |B'A|, \quad |C'B| = |A'B|, \quad |B'C| = |A'C|.$$

Аналогично можно показать, что сумма длин противоположных сторон произвольного четырёхугольника, описанного около окружности, равны, то есть: $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$ (рис. 108).

Наконец, имеется ещё одна полезная формула площади треугольника, если известен радиус вписанной в неё окружности:

$$S_{\triangle} = pr, \tag{8.2}$$

где p – полупериметр окружности, вписанной в треугольник, а r – её радиус. В самом деле, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COA} = \frac{1}{2}|AB| \cdot r + \frac{1}{2}|BC| \cdot r + \frac{1}{2}|AC| \cdot r = \frac{1}{2}(|AB| + BC| + |AC|) \cdot r = pr.$

Пример 187. Найти длины отрезков, на которые делят точки касания, вписанная в треугольник окружность, если длины сторон треугольника равны 10 см, 20 см и 24 см.

Решение. Пусть $|AC| = 10$ см, $|AB| = 20$ см и $|BC| = 24$ см. Обозначим $|AC'| = x$ см, тогда из рис. 109 получим: $(20 - x) + (10 - x) = 24$, откуда $x = 3$. Ответ: 3 см, 7 см и 17 см.

рис. 109. рис. 110. рис. 111.

Теорема косинусов. *В треугольнике ABC (рис. 110) справедлива формула:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi \tag{8.3}$$

Доказательство. Из рис. 111 по теореме Пифагора получим:
$c^2 = (a + b\cos(180^\circ - \varphi))^2 + (b\sin(180^\circ - \varphi))^2 =$
$a^2 - 2ab\cos\varphi + b^2$. Что и требовалось доказать.

Пример 188. Хорда длиной a видна под углом α с точки на окружности. Найти радиус окружности.

Решение. Так как центральный угол вдвое больше вписанного то, используя теорему косинусов, получим (рис. 112):

$a^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos 2\alpha = 2R^2(1-\cos 2\alpha)$. Ответ: $R = (a/2)/\sin\alpha$.

Из формулы площади треугольника $S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ (рис. 113) следует

рис. 112.

Теорема синусов. *В треугольнике длины сторон относятся как синусы противолежащих углов:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \qquad (8.4)$$

Действительно, из рисунка 113 видим, что площадь треугольника ABC равна: $S_\triangle = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

рис. 113.

рис. 114.

Откуда $a/b = \sin\alpha/\sin\beta$ или $a/\sin\alpha = b/\sin\beta$ и т. д.

Из теоремы синусов следует, свойство биссектрисы – *биссектриса угла треугольника делит сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.*

В самом деле, из рис. 114 получим: $\dfrac{a}{\sin\varphi} = \dfrac{c_a}{\sin\alpha}$ и $\dfrac{b}{\sin(180^\circ - \varphi)} = \dfrac{c_b}{\sin\alpha}$. Но так как $\sin(180^\circ - \varphi) = \sin\varphi$, то $\dfrac{a}{c_a} = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$ и $\dfrac{b}{c_b} = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$. Откуда

$$\frac{c_a}{a} = \frac{c_b}{b} \qquad (8.5)$$

Пример 189. Найти длины отрезков, на которые делит биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника гипотенузу, если радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 4, а гипотенуза – 26.

Решение. Пусть $|DC| = x, |BE| = y$. Из рис. 115 замечаем, что: $(x+4)^2 + (4+26-x)^2 = 26^2$, откуда находим катеты: 24 и 10.

рис. 115.

Из свойства биссектрисы следует: $y/24 = (26-y)/10, y = 18\frac{6}{17}$. Ответ: $18\frac{6}{17}$ и $7\frac{11}{17}$.

Из рис. 115 следует ещё одна полезная формула для прямоугольного треугольника, в котором a и b – катеты, c – гипотенуза и r – радиус вписанной окружности:

$$r = \frac{a+b-c}{2}. \tag{8.6}$$

Пример 190. Найти площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой $c = 25$, в который вписана окружность радиуса $r = 5$.

Решение. Из рис. 115 видим, что

$$S_{ABC} = 2S_{BOE} + 2S_{COE} + r^2 =$$
$$= r^2 + \frac{1}{2}xr + \frac{1}{2}xr + \frac{1}{2}(c-x)r + \frac{1}{2}(c-x)r = r^2 + rc.$$

Откуда получим формулу *площади прямоугольного треугольника по известной гипотенузе и радиусу вписанной окружности*:

$$S_{\triangle} = r(r+c), \tag{8.7}$$

где r – радиус вписанной окружности, а c – гипотенуза треугольника. Подставляя в (8.7) условие задачи, получим $S_{ABC} = 5 \cdot (25+5) = 150$. Ответ: 150.

При решение задач по планиметрии полезными бывают признаки равенства треугольников: *два треугольника равны*

– *по двум сторонам и углу между ними;*

– *по трём сторонам;*

– *по стороне и двум прилежащим к ней углам* и *признак подобия треугольников по двум углам.* В случае, если треугольники подобны, необходимо иметь в виду, что тогда подобны все линейные размеры треугольников: и биссектрисы, и высоты, и медианы, ... (конечно соответствующие).

рис. 116. рис. 117. рис. 118.

Пример 191. В треугольник вписали квадрат так, что одна его сторона лежит на основании треугольника длиной 30. Найти площадь квадрата, если высота треугольника, проведённая к этому основанию равна 20.

Решение. Пусть $|DF| = x$. Из рис. 116 следует, что треугольники ABC и ADF подобны, поэтому $x/30 = (20-x)/20$. Откуда $x = 12$. Ответ: 144.

$$ab = cd, \qquad D^2 = c(c+d) \tag{8.8}$$

Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке F и делятся на отрезки $a, b, c,$ и d как показано на рис. 117. В этом случае углы $\angle B$ и $\angle C$, а также $\angle D$ и $\angle A$ равны, как опирающиеся на равные дуги $\overset{\smile}{AD}$ и $\overset{\smile}{CB}$ соответственно. Так как углы $\angle CFA$ и $\angle BFD$ – вертикальные, то треугольники DBF и AFC – подобны. Отсюда получаем, что $b/d = c/a$ или $ab = cd$. Если же AB – диаметр и $|AB| = D$, точка C лежит вне окружности, а BC – касательная, то из рис. 118 получим: $D^2 = c(c+d)$.

Пример 192. На катете прямоугольного треугольника построили окружность так, что другой катет является касательной к этой окружности, а его длина равна a. Найти отрезки, на которые делит высота треугольника гипотенузу, если известна площадь окружности $S_\circ$.

Решение. Пусть $|BC| = a, |BD| = h$, площадь окружности $S_\circ = \pi R^2 = \pi |AB|^2/4$ (рис. 118), тогда $|AB|^2 = 4S_\circ/\pi$. По теореме Пифагора $c+d = \sqrt{a^2 + 4S_\circ/\pi}$, но $|AB|^2 = c(c+d)$ поэтому $c = 4S_\circ/(\pi\sqrt{a^2+4S_\circ/\pi}$ и $d = \sqrt{a^2+4S_\circ/\pi} - 4S_\circ/(\pi\sqrt{a^2+4S_\circ/\pi}) = a^2/\sqrt{a^2+4S/\pi}$.

Ответ: $4S_\circ/(\pi\sqrt{a^2+4S_\circ/\pi})$ и $a^2/\sqrt{a^2+4S_\circ/\pi}$.

Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника. *Выпуклым многоугольником* называется многоугольник, который вместе с любыми двумя своими точками содержит и отрезок их соединяющий. Например, шестиугольник на рис. 119 a) не выпуклый, а пятиугольник на рис. 119 b) – выпуклый.

Теорема 5. *Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника, у которого n сторон ($n > 2$), равна:* $180^\circ \cdot (n-2)$.

a) b)

рис. 119. рис. 120.

Действительно, так как сумма внутренних углов треугольника равна 180°, то из рис. 120 следует, что

$$\Sigma = \alpha_1 + \underbrace{\alpha_2' + \alpha_2''}_{\alpha_2} + \underbrace{\alpha_3' + \alpha_3''}_{\alpha_3} + \ldots + \underbrace{\alpha_{n-2}' + \alpha_{n-2}''}_{\alpha_{n-2}} + \alpha_{n-1} +$$
$$+ \underbrace{\alpha_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} + \ldots + \alpha_n^{(n-2)}}_{\alpha_n} = 180^\circ \cdot (n-2).$$

Пример 193. Вокруг окружности описан пятиугольник, углы которого относятся как $2:5:7:4:6$ Найти наибольший угол.

Решение. Так как пятиугольник описан вокруг окружности, то он – выпуклый. Обозначим величину одной части угла через x Тогда величины углов пятиугольника равны: $2x, 5x, 7x, 4x$ и $6x$. По теореме о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника получим $2x + 5x + 7x + 4x + 6x = 24x = 180^\circ \cdot 3$. Откуда $x = 22.5^\circ$. Ответ: 157.5°.

Метод координат. На плоскости можно ввести декартовую ортогональную систему координат (рис. 121). В этом случае положение каждой точки будет определяться парой чисел x и y. Тогда расстояние между двумя точками $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ находится по формуле:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Нетрудно показать, что, если даны координаты двух точек $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ отрезка $[AB]$, то координаты середины этого отрезка $M(x_M, y_M)$ находятся по формуле (рис. 121):

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}. \qquad (8.9)$$

рис. 121.

(Действительно, по рис. 121 видим, что $x_M - \Delta = x_A, x_M + \Delta = x_B$, откуда и следуют формулы (8.9).)

Пример 194. Найти длину медианы BH треугольника ABC, у которого известны координаты всех его вершин: $A(2;0), B(1;5), C(6;2)$.

Решение. Точка M – середина отрезка $[AB]$, поэтому можно воспользоваться формулой (8.9), находя её координаты:

$$x_M = \frac{2+6}{2} = 4, y_M = \frac{0+2}{2} = 1, |BM| = \sqrt{(4-1)^2 + (1-5)^2} = 5.$$

Ответ: 5.

Пример 195. Найти координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если известны координаты трёх его вершин: $A(1,2), B(3,4), C(7,3)$.

Решение. Точка M является точкой пересечения диагоналей AC и BD, поэтому:

$$\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2}.$$

Откуда $1 + 7 = 3 + x_D, x_D = 5$ и $2 + 3 = 4 + y_D, y_D = 1$. Откуда $D(5, 1)$.

8.1 Задания.

263. В ромбе углы относятся как 1:5. Сторона ромба 5 см. Найти площадь ромба.

264. Диагонали ромба относятся как 3:4, а сторона ромба равна 20. Найти площадь ромба.

265. В параллелограмме из тупого угла провели две высоты. Угол между ними равен 20 градусов. Найти все углы параллелограмма.

266. В параллелограмме из острого угла провели две высоты. Угол между ними равен 120 градусов. Найти все углы параллелограмма.

267. Из точки на окружности под прямым углом проведены две хорды длиной 10 и 15. Найти радиус окружности.

268. В равнобедренном треугольнике основание равно 60, а высота к нему 40. Найти высоту к боковой стороне.

269. Основания равнобочной трапеции 8 см и 3 см, боковая сторона 5 см. Найти тупой угол трапеции.

270. Биссектриса параллелограмма делит противоположную сторону на отрезки 5 и 7. Найти периметр.

271. В прямоугольной трапеции диагональ составляет с боковой стороной прямой угол. Длина диагонали равна 15, а меньшая боковая сторона равна 12. Найти длину большего основания.

272. Около прямоугольного треугольника описана окружность, радиуса 61. Катеты относятся как 60:11. Найти площадь треугольника.

273. В окружность вписан прямоугольник со сторонами 30 и 40. Найти радиус.

274. В равнобедренную трапецию вписана окружность, радиуса 4. Найти длину боковой стороны трапеции, если её площадь равна 16.

275. В окружность вписан выпуклый четырёхугольник, вершины которого делят окружность на дуги в отношении 2:3:5:8. Найти внутренние углы четырёхугольника.

276. Длина стороны треугольника, вписанного в окружность, против угла 30° равна 5 см. Найти диаметр окружности.

277. Около окружности диаметром 20 описана равнобедренная трапеция. Найти меньшее основание трапеции, если длина большего равна 36.

278. Найти высоту равнобедренной трапеции, у которой основания имеют длины 5 и 9, а диагонали взаимно перпендикулярны.

279. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, а площадь трапеции равна 9. Найти высоту трапеции.

280. Длина меньшего основания равнобедренной трапеции равна 6. Его концы соединены с серединой большего основания. Все три полученные треугольника – равносторонние. Найти площадь трапеции.

281. Длина меньшего основания равнобедренной трапеции равна 12. Его концы соединены с серединой большего основания. Все три полученные треугольника – прямоугольные. Найти площадь трапеции.

282. На меньшем основании равнобедренной трапеции построен правильный треугольник. Его высота равна высоте трапеции, а площадь в 4 раза меньше площади трапеции. Найти острый угол при основании трапеции.

283. Найти расстояние между основаниями равнобедренной трапеции, у которой длины боковой стороны, верхнего основания и средней линии соответственно равны 6, 4 и 8.

284. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 72. Найти боковую сторону трапеции, если известно, что острый угол при основании трапеции равен 30°.

285. Найти длину стороны ромба площадью 480, если длины его диагоналей относятся как 5:12.

286. В параллелограмме диагональ перпендикулярна стороне. Найти длины диагоналей этого параллелограмма, если длины сторон параллелограмма равны 10 и 26.

287. Высоты параллелограмма равны 20 и 30. Найти его стороны, если периметр параллелограмма равен 120.

288. Биссектриса прямого угла треугольника делит гипотенузу на отрезки длиной 30 и 40. Найти длины катетов.

289. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 см и 36 см. Найти отрезки, на которые гипотенуза разделена биссектрисой, а на которые – высотой.

290. Найти углы треугольника, если один из его углов равен 20°, а длина медианы, проведенной из вершины другого угла, вдвое меньше

стороны, к которой она проведена.

291. В правильный треугольник вписана окружность, а в нее вписан квадрат со стороной 2 см. Найти площадь треугольника.

292. Касательная и секущая, проведенные из общей точки, не принадлежащей окружности, взаимно перпендикулярны. Длина касательной равна 30, а внутренняя часть секущей равна 20. Найти диаметр окружности.

293. Два круга радиусов 20 и 15 внешне касаются. Из центра одного круга проведена касательная к другому кругу, а из полученной точки касания проведена касательная к первому кругу. Найти длину последней касательной.

294. Ромб делится диагональю на два равносторонних треугольника. Длина этой диагонали равна 20. Найти длину другой диагонали ромба.

295. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25, а радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 5. Найти катеты.

296. Радиусы двух окружностей равны 20 и 10, а расстояние между их центрами равно 60. Найти длины их общих внутренней и внешней касательных.

297. Углы треугольника составляют арифметическую прогрессию. Стороны, образующие средний по величине угол, имеют длины 3 и 5. Найти длину третьей стороны.

298. Найти радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, меньшая диагональ которого равна 12.

299. Около окружности радиуса 10 описана равнобедренная трапеция. Расстояние между точками касания боковых сторон равно 12. Найти площадь трапеции.

300. В треугольнике проведены высоты. Угол при одной из вершин разделен высотой на углы 40° и 30°. На какие углы делятся высотами остальные углы треугольника?

301. Найти тупой угол между сторонами параллелограмма, если длины сторон 2 и 3, а площадь параллелограмма 5.

302. Площадь прямоугольного треугольника равна S, а гипотенуза равна c. Найти диаметр окружности, вписанной в этот треугольник.

303. В ромб с тупым углом α вписан круг. Найти отношение площадей ромба и круга.

304. Общей хордой двух кругов стягиваются дуги α и β. Найти отношение площадей кругов.

305. В треугольник вписан ромб, образующий с треугольником общий угол на сторонах длиной 15 и 20. Найти длину стороны ромба.

306. В треугольник вписан параллелограмм так, что один угол у них общий. Стороны треугольника, заключающие этот угол, равны 10 см и 20 см, а параллельные им стороны параллелограмма относятся как 6:7. Найти стороны параллелограмма.

307. Из одной точки проведены две касательные к окружности, длиной 10, а расстояние между точками касания равно 16. Найти диаметр окружности.

308. Найти радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h.

309. Из вершины треугольника с основанием 44 проведены медиана и высота, равные соответственно 61 и 60. Найти длины боковых сторон треугольника.

310. В квадрат вписан другой квадрат. Найти углы между сторонами квадратов, если площадь вписанного квадрата составляет q единиц площади описанного.

311. В равнобедренный треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон лежит на основании треугольника. Найти углы боковой стороны с основанием, при котором площадь квадрата будет составлять p единиц площади треугольника.

312. Длины сторон треугольника равны $2 - a, 3 + 4a, 6$. Найти все возможные значения параметра a.

313. Длины сторон треугольника равны $a + 4, 2a - 3, 8$. Найти все возможные значения параметра a.

314. Найти площадь треугольника ABC, у которого известны координаты всех его вершин: $A(2,1), B(3,4), C(-3,2)$.

315. Найти площадь треугольника ABC, у которого известны координаты всех его вершин: $A(-1;-1), B(2;4), C(3;1)$.

316. Найти площадь четырёхугольника $ABCD$, у которого известны координаты всех его вершин: $A(-1;2), B(3;4), C(4;1), D(1;0)$.

317. Найти координаты четвёртой вершины прямоугольника, у которого известны координаты трёх других вершин: $(1;3), (5;1), (6;3)$.

318. Найти координаты вершины C прямоугольника $ABCD$, у которого известны координаты вершин: $A(1;4), B(4;2), D(1;4)$.

319. Найти координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, у которого известны координаты вершин: $A(3;2), B(1;6), C(-2;7)$.

320. Найти площадь треугольника, ограниченного прямыми:
$x = 2, y = 2x, y = 5x$.

321. Найти площадь треугольника, ограниченного прямыми:
$y = 4, y = 8x, y = 2x$.

Ответы.

263. 12.5 см^2. 264. 384. 265. $160°, 20°, 160°, 20°$.
266. $120°, 60°, 120°, 60°$. 267. $2.5\sqrt{13}$. 268. 48. 269. $120°$.
270. 34 или 38. 271. 25. 272. 1320. 273. 25. 274. 2.
275. $80°, 50°, 100°, 130°$. 276. 10 см. 277. $\frac{100}{9}$. 278. 7. 279. 3.
280. $27\sqrt{3}$. 281. 108. 282. $\arcsin\sqrt{\frac{3}{7}}$. 283. $\sqrt{20}$. 284. 12.
285. 26. 286. $4\sqrt{61}$ и 24. 287. 24 и 36. 288. 42 и 56. 289. $27\frac{9}{17}$ и $11\frac{8}{17}$ или $33\frac{3}{13}$ и $5\frac{10}{13}$. 290. $20°, 70°$ и $90°$. 291. $6\sqrt{3}$. 292. $20\sqrt{10}$. 293. $10\sqrt{6}$. 294. $20\sqrt{3}$. 295. 15 и 20. 296. $30\sqrt{3}$ и $10\sqrt{35}$. 297. $\sqrt{19}$. 298. 6. 299. $\frac{2000}{3}$. 300. $20°, 40°$ и $20°, 30°$. 301. $\pi - \arcsin\frac{5}{6}$. 302. $\sqrt{c^2+4S} - c$. 303. $\frac{4}{\pi \sin\alpha}$. 304. $\frac{\sin^2\beta/2}{\sin^2\alpha/2}$. 305. $\frac{60}{7}$. 306. $\frac{140}{19}$ и $\frac{120}{19}$ или 6 и 7. 307. $\frac{80}{3}$. 308. $\frac{h^2+(a/2)^2}{2h}$. 309. 61 и $3\sqrt{521}$.
310. $\frac{1}{2}\arcsin(\frac{1}{q} - 1)$. 311. $\operatorname{arctg}\frac{2(1-p\pm\sqrt{1-2p})}{p}$. 312. $(\frac{1}{3}; 1)$.
313. $(\frac{7}{3}; 15)$. 314. 8. 315. 6. 316. 11.
317. $(2; 7)$. 318. $(3; 5)$. 319. $(0; 3)$. 320. 6. 321. 7.

Глава 9

Тесты.

Тест 1. (1999 год)

1. Два рабочих, работая вместе, за 6 часов выполняют 0.6 всей работы. Второй рабочий за 8 часов может выполнить 0.4 всей работы. За какое время выполнит 0.9 всей работы первый рабочий?

2. Решить неравенство: $\sin x < \frac{1}{2}$ на отрезке $[-90°; 270°]$.

3. Упростить при $x \leqslant -2$ выражение $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{4x^2 + 12x + 9}$.

4. Пусть $\log_3 2 = a$. Найти $\log_{36} 48$.

5. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $-x^2 + (2a-1)x - 2a + 4 = 0$ разных знаков.

6. Решить неравенство: $\sqrt{4 + 3x} > x - 2$.

7. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит сторону параллелограмма на отрезки 7 см и 5 см. Найти периметр параллелограмма.

8. Решить уравнение: $\log_3 \log_2 \log_2 (2x + 6) = 0$.

9. Найти множество значений функции $f(x) = \dfrac{4}{6 - 5\cos x}$.

10. Решить уравнение: $\sqrt{3}\cos x + \sin 2x = 0$ на отрезке $[90°; 270°]$.

Тест 2 (1999 год)

1. Пять рабочих, работая вместе с одинаковой производительностью труда, за 15 часов выполняют 40% всей работы. За какое время выполнят 0.6 всей работы 12 рабочих?

2. Решить систему неравенств: $\begin{cases} \sin x > -\dfrac{1}{2} \\ \cos x \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$ при $[-180°; 180°]$.

3. Найти область определения функции: $f(x) = \sqrt{2 + \log_{\frac{1}{2}}(x-2)}$.

4. Найти вершину y_0 параболы: $y = 6x^2 - 12x + 3$.

5. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(x+5)(-x+2a-8) \leqslant 0$ верно при всех $x \leqslant -6$.

6. Решить неравенство: $\dfrac{4x-6}{\sqrt{4+x}+\sqrt{12-3x}} > 0$.

7. Из двух углов треугольника, против угла $84°$, проведены две биссектрисы. Найти острый угол, образованный этими биссектрисами.

8. Решить уравнение: $9^x - 4 \cdot 6^x = 0$.

9. Сократить дробь $\dfrac{8x^2-6x+1}{6x-3}$.

10. Решить уравнение: $6x - |20-4x| = 0$.

Тест 3 (2000 год)

1. Вычислить: $\log_{3\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt[3]{9}}{27\sqrt{27}}$.

2. Решить неравенство: $\dfrac{x-5x^2-7}{4x^2-x-5} \geqslant 0$.

3. Вычислить: $\operatorname{tg} 945° + \sin 930°$.

4. Решить неравенство: $\arccos x > \pi/4$.

5. Найти значение параметра a, при котором функция $y = 7(1-2x)(a-3x)$ принимает наименьшее значение при $x = 2$.

6. Найти площадь треугольника, образованного при пересечении прямых: $y = 8x, y = 3x, x = 2$.

7. Решить неравенство: $\dfrac{1}{\log_2(x+3)} \leqslant \dfrac{1}{3}$.

8. Решить неравенство: $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}-\sqrt{5-x}} \leqslant 0$.

9. В равнобедренной трапеции, у которой боковая сторона равна меньшему основанию, проведена диагональ, которая образует угол $141°$ с другой боковой стороной. Найти все углы трапеции.

10. В 1-й год два фермера собрали урожай 800 ц, причём первый собрал 60% всего урожая. Во 2-й год фермеры собрали 500 ц. причём первый собрал 84% всего урожая. Сколько процентов составляет урожай

второго фермера за второй год по отношению к урожаю, собранному им же в первому году?

Тест 4 (2000 год)

1. Вычислить: $\log_{4\sqrt{2}} \dfrac{8\sqrt[3]{4}}{\sqrt{32}}$.

2. Решить неравенство: $\dfrac{3x^2-7x+2}{7x-2x^2-3} \geqslant 0$.

3. Вычислить: $\sin 1290^\circ + \cos 1680^\circ$.

4. Решить неравенство: $\operatorname{arcctg} x \leqslant \pi/6$.

5. Найти значение параметра a, при котором функция $y = 3(5-3x)(2a+x)$ принимает наибольшее значение при $x = 4$.

6. Найти площадь треугольника, образованного при пересечении прямых: $y = 5x, y = 7x, x = 1$.

7. Решить неравенство: $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(1-x)} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

8. Решить неравенство: $\dfrac{1}{\sqrt{4+x}-\sqrt{8-x}} \leqslant 0$.

9. В равнобедренной трапеции, у которой боковая сторона равна меньшему основанию, проведена диагональ, которая образует угол 117° с другой боковой стороной. Найти все углы трапеции.

10. В 1-й год два фермера собрали урожай 200 ц, причём второй собрал 30% всего урожая. Во 2-й год фермеры собрали 180 ц. причём второй собрал 80% от величины урожая, собранного им же в первом году. Какой урожай собрали каждый фермер во втором году?

Тест 5 (2001 год)

1. Продано 420 изделий A и 300 изделий B. Сколько процентов составляет стоимость проданных изделий A от стоимости проданных изделий B, если стоимость одного изделия A в 1.6 раза больше стоимости одного изделия B?

2. В равнобедренном треугольнике основание равно 60, а высота к нему 40. Найти высоту к боковой стороне треугольнике.

3. При каких значениях параметра a решения уравнения $\log_2 \frac{x-4}{a-11} = 1$ положительны?

4. Решить неравенство: $(x^2-6x+8)\sqrt{x^2-4x+3} \leqslant 0$.

5. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна 35, а сумма первых семи равна 84. Найти a_1.

6. Найти область определения функции: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}-\sqrt{8-x}}$.
7. Вычислить $\sin(2\arcsin\frac{5}{13})$.
8. Решить неравенство: $\sin x + \sin 65° \leqslant 0$ на отрезке $[90°; 450°]$.
9. Решить уравнение: $2^x + 2^{3-x} = 6$.
10. Решить неравенство: $\dfrac{x-2}{|x+1|-5} \geqslant 0$ при $x \leqslant -2$.

Тест 6 (2001 год)

1. Завод за несколько дней изготовил 1080 деталей. После падения производительности труда на 20% он стал производить их на 2 дня дольше. Сколько дней изготавливались 1080 деталей вначале?
2. Диагонали ромба относятся как 5:12, а длина стороны ромба равна 130. Найти площадь ромба.
3. При каких значениях параметра a функция $f(x) = 5ax + 3a - x - 2$ отрицательна при всех $x \leqslant 3$.
4. В геометрической прогрессии $b_8 + b_9 = 6, b_9 + b_{10} = 12$. Найти b_{14}.
5. Решить уравнение: $1 + \cos 2x + \cos x = 0$ при $x \in [0°; 180°]$.
6. Решить неравенство: $|4 - 5x| > x + 2$.
7. Вычислить: $40 \cdot 0.125 - 0.04 \cdot 5^3 - (0.2)^{-1} \cdot (\frac{1}{125})^{-1} \cdot 0.04$.
8. Найти минимум выражения $(x+3)(y+8)$, если $2x - y = 6$.
9. Решить уравнение: $2\cos(2x+40°)-\sqrt{3} = 0$ на отрезке $[-180°; 180°]$.
10. Решить неравенство: $\dfrac{(2^x-1)\log_{\frac{1}{2}}(2x+2)}{x-3} \geqslant 0$.

Тест 7 (2002 год)

1. Было выпущено 1200 акций фирм A и B, при этом акции фирмы A составляли 20% общего числа. Сколько ещё необходимо выпустить акций фирмы A, чтобы они составляли 40% общего числа.
2. Решить неравенство: $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$ на отрезке $[0°; 360°]$.
3. Решить неравенство: $\dfrac{3}{\frac{1}{2}+\sin x} \leqslant 1$ на отрезке $[0°; 360°]$.
4. Решить неравенство: $\dfrac{\sqrt{x+5}-4}{x-5} \geqslant 0$.
5. В окружность вписан треугольник так, что его вершины делят окружность на дуги в отношении 30:50:70. Найти наименьший угол треугольника.
6. Решить уравнение: $\dfrac{\log_2(x^2-4)}{\log_2 3x} = 1$.

7. В арифметической прогрессии $a_6 = 26$ и $a_4 - a_1 = 9$. Найти сумму первых десяти членов арифметической прогрессии.

8. Решить уравнение: $\dfrac{2}{|x-6|} + \dfrac{1}{x} = 0$.

9. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$2\cos^2 x + \sqrt{2a+4}\cos x = 0$$

имеет более 2-х различных корней на отрезке $[0°; 360°]$.

10. Решить уравнение: $2^{|x-20|} = 8^{-x}$.

Тест 8 (2002 год)

1. Автомобилист проехал 75% пути со скоростью 80 км/час, а оставшийся путь – со скоростью 40 км/час. На всю дорогу он затратил 1 час 15 минут. Какое расстояние он проехал?

2. Решить уравнение: $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ на отрезке $[90°; 270°]$.

3. Решить неравенство: $\dfrac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x} \geqslant 1$ на отрезке $[0°; 360°]$.

4. Решить уравнение: $2\cos^2 x - \cos x = 0$ на отрезке $[180°; 360°]$.

5. Трапеция, высота которой 15, а площадь 330, разбита на два треугольника, площади которых относятся как 4:7. Найти длины оснований трапеции.

6. Решить уравнение: $\log_2 \sqrt{10-3x} - \log_2 x = 0$.

7. В арифметической прогрессии $a_{15} = 47$ и $a_6 = 20$. Найти десятый член арифметической прогрессии.

8. Решить неравенство: $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 2\sin x} \leqslant 1$ на отрезке $[0°; 360°]$.

9. Найти все значения параметров a и b, при которых минимальное значение функции $f(x) = x^2 + ax + b$, равное (-4), достигается в точке 3.

10. Найти наименьший номер члена арифметической прогрессии $\{a_n\}$, при котором $a_n > 120$, если её пятый член равен 20, а десятый 35.

Тест 9 (2003 год)

1. Вершина параболы $y = x^2 + ax + b$ имеет координаты $x_0 = 4$ и $y_0 = -9$. Найти ординату точки пересечения параболы с осью OY.

2. Найти наименьшее значение функции $f(x) = |x-a| - 6$ на отрезке $[-2; 7]$ для каждого $a > 9$.

3. Найти множество значений x на отрезке $[90°; 270°]$, при которых последовательность чисел

$$-2; 2\sin x; \sqrt{3}\cos x + 1$$

была бы геометрической прогрессией.

4. Решить неравенство: $8x^4 \leqslant -x^7$.

5. Сколько процентов числа 24 составляет разность между ним и 64% числа 21?

6. В равностороннем треугольнике $\triangle ABC$ на стороне AC лежит точка D так, что $\angle ABD : \angle DBC = 2 : 13$. Найти $\angle BDC$.

7. Сколько из чисел

$$\log_3 21; \log_2 7; \log_5 121; \log_6 132; \log_4 63$$

меньше 3?

8. Решить неравенство: $(0.7)^{x+12} < (0.7)^{x^2+2x}$

9. Найти x, если $a^x = \dfrac{a^{-1/2} \cdot a^{1/6}}{a^{-4/15}}$.

10. Вычислить $\arccos(\sin(-170°))$.

Тест 10 (2003 год)

1. Доход второго предприятия составил 90% от дохода первого или 75% от дохода третьего. Сколько процентов от дохода первого составляет доход третьего предприятия?

2. Сократить дробь $\dfrac{21x^2 + 52x + 32}{3x + 4}$.

3. Биссектриса угла $\angle A$ при основании треугольника $\triangle ABC$ пересекает боковую сторону BC в точке D. Найти угол $\angle B$ при вершине треугольника, если угол $\angle ADB = 81°$ и $\triangle ABC$ – равнобедренный.

4. Решить уравнение: $4^{1-x} \cdot 10^{2x} = 500$.

5. Найти наименьшее из чисел

$$\sin 116°; \quad \cos 122°; \quad \cos 257°; \quad \sin 302°.$$

6. Решить неравенство: $x - \sqrt{24 - 2x} < 0$.

7. Решить неравенство: $\log_{\frac{1}{3}}(\log_2(x - 4) - 2) + 1 \geqslant 0$.

8. Найти наибольшее значение функции

$$f(x) = 3 + \frac{4}{\pi}\arccos x.$$

9. Найти все a, при которых произведение двух различных корней уравнения

$$x^2 - 2ax + a(a-2) = 0$$

будет меньше 35.

10. Найти все a, при которых графики функций $y = ax + 2$ и $y = x^2 + 3x + 11$ не имеют общих точек.

Тест 11 (2003 год)

1. В сосуде 1800 граммов раствора, содержащего 30% соли. Сколько нужно добавить соли, чтобы получить раствор с 40% соли?

2. Вычислить $\log_{25} 16 \cdot \log_{16} \sqrt{5 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}}$.

3. В $\triangle ABC$ острый угол между биссектрисами AD и CF равен $65°$. Найти угол при вершине B.

4. Решить уравнение: $4x + \sqrt{x^2 - 18x + 81} = 0$.

5. Решить уравнение:

$$\sqrt{3}\sin 2x + 2\sin^2 x = 0, \text{ при } x \in [90°; 270°].$$

6. Найти разность арифметической прогрессии, у которой произведение $a_4 \cdot a_7$ будет наименьшим и $a_1 = 6$.

7. Решить неравенство: $16x^{-6} > x^{-4}$.

8. Решить уравнение: $|2x + 4| - |x - 11| = 17$.

9. Найти область определения функции

$$f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(2 - \sqrt{14 - 2x}).$$

10. Решить уравнение при $x \in [90°; 270°]$: $\sin(x - 20°) - \cos 50° = 0$.

Тест 12 (2004 год)

1. Найти дробь, у которой в знаменателе 20, и которая больше $4/13$ и меньше $5/13$.

2. Решить уравнение:

$$\sin(\pi(2x + 1)) = \cos 30°,$$

при $x \in [0; 1]$.

3. Решить уравнение:

$$-\left|\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x+3}{x}\right)\right| - 2\log_{\frac{1}{3}} 2 = 1.$$

4. При каких a вершина параболы $y = x^2 - 2ax + 2$ лежит выше прямой $y = 3x - 2$ с той же абсциссой.

5. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой 26 вписана окружность радиуса 4. Найти площадь треугольника.

6. Решить неравенство: $\arcsin(\sqrt{x+3} - 1) < 0$.

7. Решить неравенство: $x - 1 < \sqrt{x+5}$.

8. Дана арифметическая прогрессия $a_1 = 3, a_2 = 4 + 15c, a_3 = 12 - 5c$. Найти 5-й член этой арифметической прогрессии.

9. 20 человек 42% работы делают за 6 часов. За какое время 8 человек сделает 56% работы?

10. Решить неравенство: $\log_x 9 \leqslant 1$.

Тест 13 (2004 год)

1. Какое число нужно добавить к числителю и знаменателю дроби 17/23 чтобы получить дробь 4/5.

2. Решить уравнение:

$$x + \lg(2 - 5^{-x}) = x \lg 2 + \lg 50.$$

3. Решить уравнение: $\arcsin x = \arccos \frac{8}{17}$.

4. При каких a неравенство

$$\log_2(2 - 7x^2) \geqslant a - 4$$

имеет решение?

5. В прямоугольною трапецию вписана окружность с радиусом 2. Найти длину большей боковой стороны, если площадь трапеции равна 60.

6. Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{2x+15}}{x} \leqslant 1.$$

7. Найти множество значений функции $f(x)$:

$$f(x) = 1 + 6\cos^2 x - 2\sin^2 x.$$

8. При каких a ордината вершины параболы $y = x^2 - 2ax + 9$ равна 5?

9. 6 книг и 6 тетради стоят столько же, сколько 2 книги и 9 тетрадей. Сколько % составляет стоимость одной тетради от стоимости одной книги?

10. Решить неравенство:

$$\frac{(5x^{-1}-1)^2}{1-x^{-1}} \leqslant 0.$$

Тест 14 (2005 год)

1. Найти все значение параметра a, при которых уравнение

$$2\sin^2 x + a\sin x = 0,$$

имеет ровно два различных корня на отрезке $[60°; 270°]$.

2. Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{x-3}-4}{\sqrt{x-5}-7} < 0.$$

3. Найти площадь треугольника ABC, если известны координаты его вершин: $A(4;6)$, $B(1;3)$ и $C(2;3)$.

4. В прямоугольном треугольнике длина высоты, опущенной на гипотенузу равна $2\sqrt{2}$, а длина одного из катетов равна 3. Найти площадь треугольника.

5. Найти область определения функции:

$$f(x) = \arccos\frac{3-x}{x+4}.$$

6. Решить неравенство:

$$a^{3x-7} > b^{2x+8},$$

если $\log_a b = 2$ и $a > b$.

7. Решить уравнение:

$$\log_2 x + \log_6 x = 2\log_2 12.$$

8. Найти числа a и b квадратного уравнения $x^2 + ax + b = 0$, если известно, что числа $x_1 - 2$ и $x_2 - 2$ являются его корнями, где x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 5x - 7 = 0$.

9. Товар A стоил 175 рублей, товар B стоил 133 рубля, товар C стоил 119 рублей. Стоимость товара A упала на $k\%$, где k – целое число так,

что товар А стал стоить меньше товара В, но больше товара С. Найти нижнюю и верхнюю границы изменения числа k.

10. Найти x в арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если:

$$a_1 = 3 - x, a_2 = 7 - x, a_n = 39 - x, S_n = 150.$$

Тест 15 (2005 год)

1. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 6a = 0 \\ x^2 + 6x + 3a = 0 \end{cases}$$

имеет решения.

2. Упростить:

$$\frac{1}{2\sqrt{3}+4} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{5}-4}.$$

3. Найти координаты вершины D прямоугольника $ABCD$, если известны координаты трёх других его вершин $A(3;2)$, $B(1;5)$ и $C(4;7)$.

4. В прямоугольном треугольнике высота, опущенной на гипотенузу равна, делит её на отрезки длиной 3 и 5. Найти площадь треугольника.

5. Найти x, при котором функция

$$f(x) = |\log_{\sqrt{6}} \log_{\sqrt{2}}(x+5) - 2|$$

принимает наименьшее значение.

6. Найти наименьший угол, если:

$$\alpha_1 = \arccos 0.8, \alpha_2 = \arccos(-0.2), \alpha_3 = \arcsin 0.9, \alpha_4 = \arcsin 0.7.$$

7. Решить неравенство:

$$\log_a b^{x+1} < \log_b a^{x-7},$$

если $\log_b a = -3$.

8. В арифметической прогрессии $\{a_n\}$ известно, что $a_2 = 3a_5 + 9, a_6 = 2a_7 - 3$. Найти a_9.

9. Пешеход прошёл некоторое расстояние за 2 часа 40 минут, а велосипедист проехал 2/3 того же расстояния за 1 час 40 минут. Сколько процентов составляет скорость пешехода от скорости велосипедиста?

10. Решить уравнение

$$\sin(x + 40^\circ) = \sin x$$

на отрезке $[0^\circ; 360^\circ]$.

Тест 16 (Олимпиада 2003 года.)

1. Решить неравенство:

$$\frac{7 - x}{\sqrt{3x + 1} + \sqrt{2x - 1}} \geqslant 0.$$

2. Решить уравнение:

$$\frac{6x}{|2x + 5| - 3} = 1.$$

3. Найти знаменатель и сумму первых четырех членов геометрической прогрессии с положительными членами, если

$$b_1 - b_2 = 162, b_3 - b_4 = 18.$$

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_2(x + 8) - \log_2(a - 3) = 0$$

имеет отрицательные корни?

5. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \cos x > \frac{1}{2} \\ \sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

на промежутке $0^\circ \leqslant x \leqslant 360^\circ$. Ответы давать в градусах.

6. Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x$$

на промежутке $0^\circ < x \leqslant 360^\circ$. Ответы давать в градусах.

7. Решить уравнение:

$$\frac{1}{\sqrt{4x - 9}} = (4x - 9)^{\log_{\frac{1}{36}}(x^2 + x - 6)}$$

8. Найти точки максимума функции $y(x) = -x^3 + 2x|x-2|$, заданной на отрезке $[0;3]$, и её наименьшее значение на этом отрезке.

9. Сколько килограммов воды надо выпарить из 4.8 тонн раствора соли, содержащего 90% воды, чтобы получить раствор, содержащий 75% воды?

10. Длины боковых сторон трапеции, в которую можно вписать окружность равны 3 и 13. Средняя линия трапеции делит ее на две части, площади которых относятся как 3:5. Найти длины оснований трапеции.

Тест 17 (Олимпиада 2003 года.)

1. Решить неравенство:

$$\frac{3}{\sqrt{4x-4}-\sqrt{6-x}} > 0.$$

2. Решить уравнение:

$$\frac{3x}{|4x-1|-7} = 3.$$

3. Найти первый член и сумму первых четырех членов геометрической прогрессии с положительными членами, если

$$b_2 + b_4 = 12, b_4 + b_6 = 108.$$

4. При каких значениях параметра a уравнение $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = -25a$ имеет положительные корни?

5. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \cos x \geqslant -\frac{1}{2} \\ \sin x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

на промежутке $0^\circ \leqslant x \leqslant 360^\circ$. Ответ давать в градусах.

6. Решить уравнение

$$\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg} x = 0$$

на промежутке $0^\circ \leqslant x \leqslant 360^\circ$. Ответы давать в градусах.

7. Решить уравнение:

$$\frac{1}{\sqrt{-6x-7}} = (-6x-7)^{\log_{\frac{1}{16}}(-x^2-5x)}$$

8. Найти точки миниума функции $y(x) = -5x^3 + 2x|x+2|$, заданной на отрезке $[-3, 0]$, и её наибольшее значение на этом отрезке.

9. У предпринимателя 1600 акций предприятий А и В. Акции предприятия А составляют 30% от общего количества. Сколько акций предприятия А нужно докупить предпринимателю, чтобы их доля достигла 60% от общего количества?

10. В треугольнике ABC длины сторон AB и BC равна 9. На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону BC в точке D так, что $BD : CD = 4 : 5$. Найти длину стороны AC.

Тест 18 (Олимпиада 2004 года.)

1. Решить неравенство:

$$19^{\left|\frac{6x+8}{10x+13}\right|} > 1.$$

2. Решить уравнение:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-x\log_3 4} \cdot 4^{x^2+4x} = 1.$$

3. В трапеции проведена диагональ, которая делит её на два треугольника, площади которых относятся как 2 к 5. Найти основания трапеции, если её площадь равна 210, а высота – 6.

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{x-1} = \frac{\arcsin|6-a|}{32-a^2}$$

имеет решение при всех допустимых x?

5. Решить уравнение:

$$\sqrt{2x^2-6x} + \sqrt{11x-3x^2-6} = \sqrt{9-3x}.$$

6. Вычислить:

$$\log_{16} 125 \cdot (\log_{18} 40 + \log_{18} 0.4) \cdot (\log_{20} 108 - \log_{20} 6) \cdot \log_{25} 20.$$

7. Решить уравнение:

$$(x+7) + (x+11) + (x+15) + \ldots + (x+55) = 416.$$

8. Найти область определения функции:

$$f(x) = \sqrt{1 - 2\cos x} + \sqrt{10 - x^2}.$$

9. Найти a и b, чтобы при любых x сохранялось равенство:

$$\frac{4x - 57}{x^2 - 361} = \frac{a}{x + 19} + \frac{b}{19 - x}.$$

10. Известно, что первый сорт стали содержит 7% железа, а второй – 32%. Сколько нужно взять каждого сорта в сплав весом 140 тонн, чтобы содержание железа было 27%?

Тест 19 (Олимпиада 2004 года.)

1. Решить неравенство:

$$0.25^{\left|\frac{2x-5}{x+1}\right|} < 1.$$

2. Решить уравнение:

$$2^{x \log_2 6} \cdot 6^{x^2 - 12} = 1.$$

3. Площадь трапеции равна 450, а высота – 15. Диагональ делит трапецию на два треугольника, площади которых относятся как 7:8. Найти длины оснований.

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{x - 1} = \frac{\arccos(a - 5)}{8a - a^2 - 15}$$

имеет решение при всех x?

5. Решить уравнение:

$$\sqrt{-x^2 + 8x - 15} + \sqrt{x^2 - 4x - 5} = \sqrt{x^2 - 7x + 10}.$$

6. Вычислить:

$$\log_{49} 4 \cdot (\log_6 21 - \log_6 3) \cdot (\log_5 3 + \log_5 2) \cdot \log_4 125.$$

7. Решить уравнение:

$$(x - 5) + x + (x + 5) + \ldots + (x + 65) = 465.$$

8. Найти область определения функции:

$$f(x)=\sqrt{2\sin x+\sqrt{3}}+\lg(5-x^2).$$

9. Найти a и b, при которых равенство:

$$\frac{7x+5}{25-x^2}=\frac{a}{x-5}+\frac{b}{x+5}$$

выполняется для всех допустимых значений x.

10. Купили два товара за 3 300 руб., которые затем продали с прибылью в 32%. Сколько стоил каждый товар, если прибыль с первого составила 35%, а со второго – 24%?

Тест 20 (Олимпиада 2005 года.)

1. Вычислить:

$$0.04^{\log_5(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots)-\log_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots)}.$$

2. Решить уравнение:

$$\log_2\left(\frac{x}{|x-5|+1}\right)=-1.$$

3. При каких значениях параметра a касательная к графику $y=a-\frac{3}{2}x^2$ отсекает от первой четверти равнобедренный треугольник площадью $S=\frac{9}{50}$.

4. В треугольнике ABC биссектриса угла B пересекает гипотенузу AC в точке M. Найти расстояние от точки M до катета BC, если длина $|AB|=6$, а $|BC|=8$.

5. Вычислить:

$$\operatorname{ctg}(\arcsin\frac{8}{9}).$$

6. Решить неравенство:

$$0.5^{\sqrt{x^2-5}-1}+\frac{2}{0.5^{\sqrt{x^2-5}}}<5.$$

7. Найти все значения параметра k, при которых система:

$$\begin{cases} 4x+5y=8k \\ 5x+k^2y=25. \end{cases}$$

имеет решение.

8. Свежие грибы содержат 85% воды, а сухие – 15% воды. Сколько кг сухих грибов можно получить из 34 кг свежих?

9. Решить неравенство:

$$\frac{8x^2+2\pi x-3\pi^2}{\sqrt{4\cos^2 x-1}}\leqslant 0.$$

10. Упростить:

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{a^3}-3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}-\sqrt{b^3}}{a-b}+\frac{4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right).$$

Тест 21.

1. На складе продукции A на 20% меньше, чем продукции B, которой в 1.4 раза больше, чем продукции C. На сколько процентов продукции A больше, чем продукции C?

2. Решить неравенство: $|2x-x^2-2|<|3x-x^2-3|$.

3. Упростить выражение $\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1+\sin x}$ при $x\in[\pi;3\pi/2]$.

4. Найти первые три члена геометрической прогрессии, если сумма первых её n членов S_n определяется формулой: $S_n=4(1-2^{-n})$.

5. Найти все значения параметра a, при котором уравнение:
$(a-1)x^2+2(a-1)x-2=0$ не имеет корней.

6. Решить неравенство: $\operatorname{tg}(25^\circ-x)<\operatorname{ctg}55^\circ$ при $x\in(-515^\circ;-335^\circ)$.

7. Прямая, проведённая через точку касания двух окружностей, образует отрезки длиной 12 см и 36 см. Найти радиус меньшей окружности, если радиус большей равен 21 см.

8. Решить уравнение: $\sin 5x\cdot\cos x=\sin 4x\cdot\cos 2x$ при $x\in[0;\pi/2]$.

9. Решить неравенство: $\log_2\log_{1/2}(3.5-2x)<0$.

10. Решить уравнение: $(x^2-10x+21)\sqrt{x^2-12x+32}=0$.

Тест 22.

1. В первый год прибыль фирмы возросла на некоторую величину, а затем на втрое большую величину упала. В результате за два года прибыль фирмы упала на 40%. На сколько процентов изменялась прибыль фирмы каждый год?

2. Вычислить $\arccos\cos 13.2\pi$.

3. Решить уравнение: $5\cos^2 x-\cos x\cdot\sin x+2\sin^2 x=3$ при $x\in[\pi;3\pi/2]$.

4. Найти $f(x_1-4)-f(x_2+4)$, если $f(x)=2x^2-x-4$ и x_1, x_2 – корни уравнения $f(x)=0$.

5. Представить в виде произведения $25a^4-5a^2+4$.

6. Решить уравнение: $\log_2^2 x^2+\log_{\frac{1}{2}} 4x=1$.

7. Отношение бесконечнопериодических десятичных дробей $\dfrac{2.(1)}{3.(4)}$ записать в виде обыкновенной дроби.

8. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} a+x<6 \\ 2a+x<ax \end{cases}$ не имеет решений.

9. Решить уравнение: $|5-|x+2||=|5+x|$.

10. Найти радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если его катеты имеют длины 10 см и 24 см.

Тест 23.

1. В первый год прибыль фирмы упала на некоторую величину, а затем упала на вдвое большую. В результате за два года прибыль фирмы упала на 60%. На сколько процентов изменялась прибыль фирмы каждый год?

2. Вычислить: $\arcsin\sin 11.3\pi$.

3. Решить уравнение: $2\cos^2 x+5\cos x\cdot\sin x+3\sin^2 x=5$ при $x\in[0;\pi/2]$.

4. Найти $f(x_1+2)-f(x_2-2)$, если $f(x)=2x^2+5x-8$ и x_1, x_2 – корни уравнения $f(x)=0$.

5. Представить в виде произведения $4a^4-4a^2+9$.

6. Решить уравнение: $3\log_{512}^2 x^3-12\log_{1/512} x=4$.

7. Отношение бесконечнопериодических десятичных дробей $\dfrac{0.(2)}{2.(6)}$ записать в виде обыкновенной дроби.

8. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} a-x<-2 \\ 2a+x>ax \end{cases}$ имеет решения.

9. Решить уравнение: $|5-|x-2||=|5-x|$.

10. Найти катет прямоугольного треугольника, если длина другого его катета равна 3 см, а радиус вписанной в него окружности равен 1 см.

Ответы.

Тест 1: 1. 18 часов 2. $[-90°; 30°) \cup (150°; 270°]$ 3. $-3x$ 4. $\frac{1+4a}{2(1+a)}$
5. $a < 2$ 6. $[-4/3; 7)$ 7. 34 см или 38 см 8. -1 9. $[4/11; 4]$
10. $90°, 240°, 270°$.
Тест 2: 1. $9\frac{3}{8}$ часа 2. $[-180°; -150°) \cup [60°; 180°]$ 3. $(2; 6]$ 4. -3
5. $a \geqslant 1$ 6. $(\frac{3}{2}; 4]$ 7. $48°$ 8. $\log_{\frac{3}{2}} 4$ 9. $\frac{4x-1}{3}$ 10. 2.
Тест 3: 1. $-\frac{23}{9}$ 2. $(-1; \frac{5}{4})$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $[-1; \sqrt{2}/2)$ 5. 10.5 6. 10
7. $(-3; -2) \cup [5; +\infty)$ 8. $[3; 4)$ 9. $26°, 26°, 154°, 154°$ 10. 25%.
Тест 4: 1. $\frac{7}{15}$ 2). $[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}) \cup [2; 3)$ 3. -1 4. $x \geqslant \sqrt{3}$ 5. $-\frac{19}{6}$ 6.1
7. $(0; \frac{8}{9}]$ 8. $[-4; 2)$ 9. $42°, 42°, 138°, 138°$ 10. 48 ц, 132 ц.
Тест 5: 1. 224% 2. 48 3. $a > 9, a \neq 11$ 4. $[3; 4] \cup \{1\}$ 5. -3
6. $[4; 6) \cup (6; 8]$ 7. $\frac{120}{169}$ 8. $[245°; 295°]$ 9. 1, 2 10. $(-6; -2]$.
Тест 6: 1. 8 дней 2. 12000 3. $[\frac{1}{5}; \frac{5}{18})$ 4. 128 5. $90°, 120°$
6. $(-\infty; \frac{1}{3}) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$ 7. -25 8. -2 9. $-35°, -5°, 145°, 175°$
10. $(-1; -\frac{1}{2}] \cup [0; 3)$.
Тест 7: 1. 400 2. $[0°; 30°] \cup [150°; 360°]$ 3. $(210°; 330°)$
4. $[-5; 5) \cup [11; +\infty)$ 5. $36°$ 6. 4 7. 245 8. -6 9. $(-2; 0]$
10. -10.
Тест 8: 1. 80 км 2. $135°, 225°$ 3. $[0°; 135°) \cup (225°; 360°]$
4. $270°, 300°$ 5. 16, 28 6. 2 7. 32
8. $[45°; 135°] \cup (225°; 315°)$ 9. $a = -6, b = 5$ 10. 39.
Тест 9: 1. 7 2. $a-13$ 3. $150°, 210°$ 4. $x \leqslant -2, x = 0$ 5. 44%
6. $68°$ 7. 5 8. $(-4; 3)$ 9. если $a \leqslant 0$, то $x \in \varnothing$, если $a = 1$,
то $x \in R$, если $a > 0, a \neq 1$, то $x = -\frac{1}{15}$ 10. $100°$.
Тест 10: 1 120% 2. $7x + 8, x \neq -\frac{4}{3}$ 3. $72°$ 4. 1.5
5. $\sin 302°$ 6. $x < 4$ 7. $(8; 36]$ 8. 7 9. $(0; 7)$ 10. $(-3; 9)$.
Тест 11: 1. 300 грамм 2. $\frac{1}{12}$ 3. $50°$ 4. -3 5. $120°, 180°$
6. -1.5 7. $(-4; 0) \cup (0; 4)$ 8. $8, -32$ 9. $(5; 7]$ 10. $160°$.
Тест 12: 1. 7 2. $2/3, 5/6$ 3. $-12, 9$ 4. $(-4; 1)$ 5. 120
6. $[-3; -2)$ 7. $[-5; 4)$ 8. 19 9. 20 10. $0 < x < 1, x \geqslant 9$.
Тест 13: 1. 7 2. 2 3. $\frac{15}{17}$ 4. $a \leqslant 5$ 5. 26 6.$[-7.5; 0) \cup [5; +\infty)$
7. $[-1; 7]$ 8. $a = \pm 2$ 9. 80% 10. $(0; 1) \cup \{5\}$.
Тест 14: 1. $\{-2\} \cup (-\sqrt{3}; 0) \cup (0; 2]$ 2. $(19; 54)$ 3. $\frac{3}{2}$ 4. $9\sqrt{2}$
5. $x \geqslant -\frac{1}{2}$ 6. $x > -23$ 7. 36 8. $a = -1, b = -13$
9. $k = 25\%, k = 31\%$ 10. 6.
Тест 15: 1. $a = \{0; -9\}$ 2. 0 3. $(6; 4)$ 4. $4\sqrt{15}$
5. $x = 3$ 6. α_1 7. $x < 8$ 8. 8 9. 93.75% 10. $70°, 250°$.
Тест 16: 1. $[\frac{1}{2}; 7]$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. $q = \frac{1}{3}, S_4 = 360$ 4. $(3; 11)$

5. $[45°; 60°)$ 6. $270°, 360°$ 7. $\frac{5}{2}, 3$
8. $x_{\max} = \frac{2}{3}, y_{\min} = -21$ 9. 2880 кг 10. 6, 10.
Тест 17: 1. $(2; 6]$ 2. $-\frac{6}{5}, \frac{8}{3}$ 3. $b_1 = 0.4, S_4 = 16$ 4. $(-\frac{1}{125}; 0)$
5. $[60°; 120°]$ 6. $45°, 135°$ 7. $-4, -\frac{4}{3}$
8. $x_{\min} = -\frac{2}{5}, y_{\max} = 129$ 9. 1200 акций 10. $3\sqrt{10}$.
Тест 18: 1. $x \neq \{-\frac{4}{3}; -1.3\}$ 2. $-5, 0$ 3. 20, 50 4. $[5; 4\sqrt{2})$
5. 3 6. $\frac{3}{2}$ 7. 1 8. $(-\sqrt{10}; -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}; \sqrt{10}]$
9. $a = 3.5, b = -0.5$ 10. 112 тонн и 28 тонн.
Тест 19: 1. $x \neq \{-1; 2.5\}$ 2. $-4, 3$ 3. 28, 32 4. $[4; 5)$ 5. 5
6. $\frac{3}{2}$ 7. 1 8. $(-\sqrt{5}; -\frac{2\pi}{3}] \cup [-\frac{\pi}{3}; \sqrt{5})$ 9. $a = -4, b = -3$
10. 2400 руб. и 900 руб.
Тест 20: 1. 9 2. 2 3. $a = \frac{13}{30}$ 4. $\frac{24}{7}$ 5. $\frac{\sqrt{17}}{8}$
6. $(-\sqrt{6}; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; \sqrt{6})$ 7. $k \neq -2.5$ 8. 6 кг
9. $[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{2\pi}{3}) \cup (-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3})$ 10. $a - b$.
Тест 21: 1. 12% 2. $(-\infty; 1)$ 3. $2\sin\frac{x}{2}$ 4. $2, 1, \frac{1}{2}$ 5. $(-1; 1]$
6. $(-515°; -425°) \cup (-370°; -335°)$ 7. 7 см 8. $0, \pi/6, \pi/2$
9. $(\frac{5}{4}; 1.5)$ 10. 3, 4, 8.
Тест 22: 1. 20%, 50% 2. 0.8π 3. $\frac{5\pi}{4}$ 4. 0
5. $(5a^2 - 5a + 2)(5a^2 + 5a + 2)$ 6. $2, 2^{-3/4}$ 7. $\frac{19}{31}$
8. $[1; 2] \cup [3; +\infty)$ 9. $-6, -1$ 10. 4 см.
Тест 23: 1. 20%, 50% 2. -0.3π 3. $\pi/4, \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$ 4. 0
5. $(2a^2 + 4a + 3)(2a^2 - 4a + 3)$ 6. $4, 1/64$ 7. $\frac{1}{12}$ 8. $(-\infty; 2)$
9. 1, 6 10. 4 см.

Оглавление

Учебное издание

Дорофеев Вячеслав Юрьевич

канд. физ.-мат. наук,
доцент кафедры высшей математики
СПбГУЭФ

Лицензия ЛР № 020412 от 12.02.97

Подписано в печать 23.09.05 Формат 60×84 1/16. Бумага
офсетная. Печ. л. 10,0 Тираж 490 экз. Заказ 905

Издательство Санкт-Петербургского государственного университета
экономики и финансов
191023, Санкт-Петербург, Садовая ул., д. 21

Отпечатано в типографии ООО «Деметра»
190008, СПб, наб. канала Грибоедова, д. 176
офис 23, e-mail: demetra@rol.ru